4° Math. P.

93

CYCLOMETRIA

verè & absolutè

In ipsa Natura Circuli cum rectilineo inventa, & ita quidem, ut CIRCINO & REGULA *exquisitè tractari possit;*

Ab

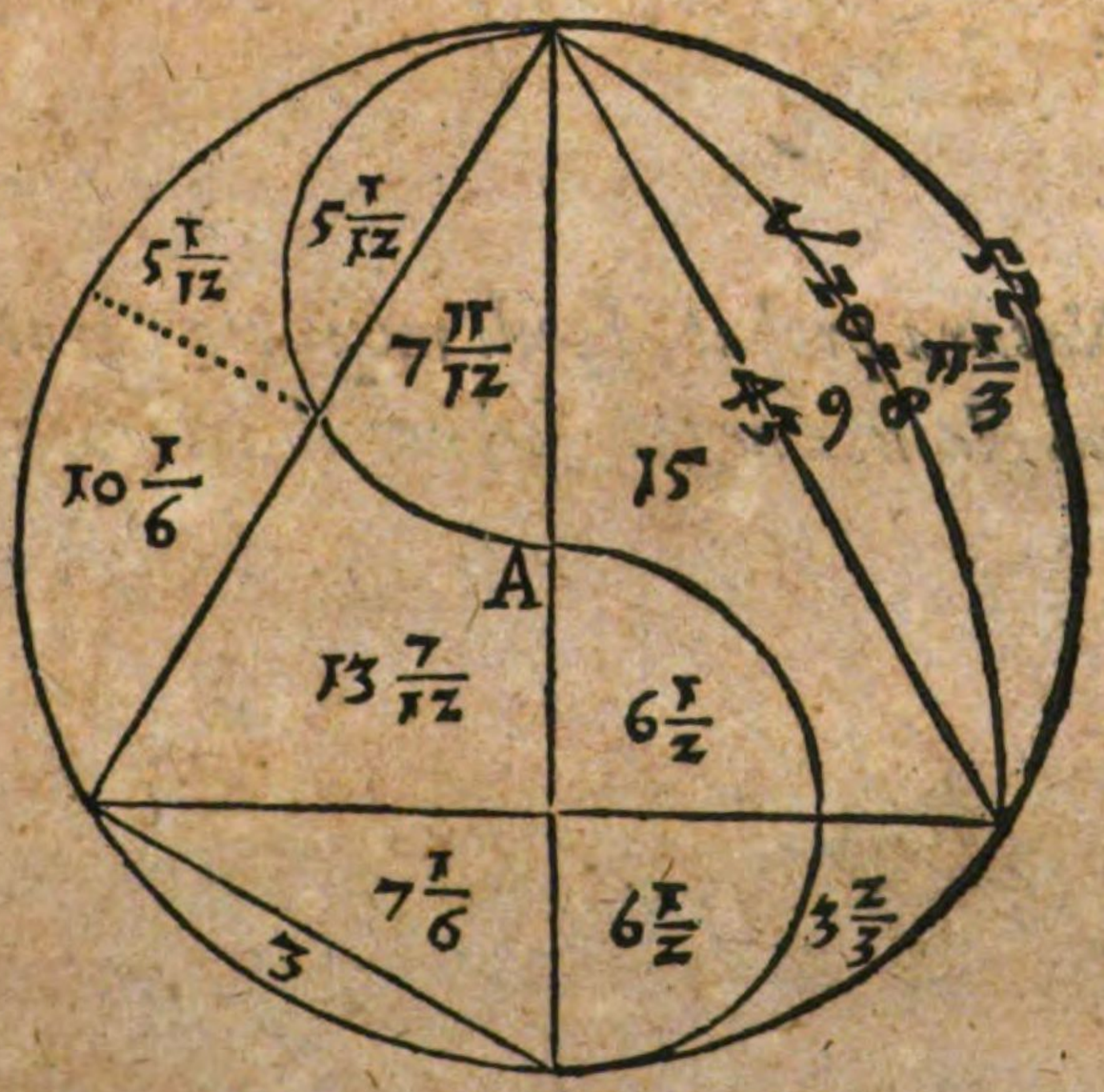
Omnibus ingenuis Matheseos alumnis hactenus exoptata.

Cui accessit

Introductio ad CANONEM TRIGONOMETRIÆ sub initium & finem Quadrantis Circuli instaurandum.

Ad

Illustrissimum Hassiæ Landgravium Dn PHILIPPUM.



CIRCULUS AD LECTOREM.

En varijs intrò distinctis arte figuris:
Auctoris vindex nominis esse volo.

HAMBURGI,
Ex Bibliopolio FROBENIANO.
A. C. CIↃ. IↃ.CXXVII.

Syr: 4.

Ἕως θανάτου ἀγωνίσαι περὶ τῆς ἀληθείας,
καὶ κύριος ὁ θεὸς πολεμήσει ὑπὲρ σοῦ.

Quod Natura probat, facili mox arte paratur:
Quod Natura negat, sed nec ab arte venit.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Illustrißimo ac Celsißimo Principi ac Domino,

DN. PHILIPPO,

LANDGRAVIO HASSIÆ, COMITI CATTIMELIBOCI, DIETZ, ZIGENHAIN ET NIDDÆ, &c.

Domino meo clementiſs.

S. P. D.

Georgius Ludovicus Frobenius.

AFfero ad te, Illuſtriſs: ac Celſiſsime Princeps PHILIPPE, fœtum hunc Mathematicum, non præcocem, ſed ſatis maturum ac legitimo tempore editum, & ad Gratiæ tuæ aram devotè offero; fœtum at meum! non meum. Meum eſſe dico jure adoptionis, cum genitor ejus, quo in hoc Arctoo Orbe antiquiorem ac certiorem, addo & benigniorem, amicorum habeo neminẽ, pro ſingulari, cùm apud illuſtre illud Daniæ ſidus TYCHONEM BRAHE una eſſemus, primùm initâ, & in XXXVI. jam annum ſanctè culta neceſsitudine, per ſpontaneam emancipationem ex poteſtate ſua in meam eum tradiderit, quem dignè habitum ac publica veſte amictum meis impenſis in luce & conſpectu omniũ apparere volui. Quia n. in ſe fovet nobiliſsimum illud problema Geometricum, de quo à primis pænè hujus ſcientiæ incunabulis inter ſummos omnium ſeculorum artifices variè diſceptatum fuit, ejusq; enucleationem germanam, ex ipſo Naturæ ſinu depromptã producit, quidni dignus ſit, quem publicè prodeuntem omnes Mathematicarum artium cultores avidè excipiant, rectè æſtiment, ſincerè ament? Meum verò hunc fœtum non eſſe ingenuè fateor (abſit n. ut horrendo illo plagii crimine me contaminem) cum verum habeat parentem eum, qui tum ob præclara

ſua in rem Aſtronomicam merita, ſatis quidem notus eſt ac celebris, tum in Arithmeticis ac Geometricis diu multumq́;, ut inſpicienti luculenter apparebit, verſatus. Is poſt tabulam jám latens, Apellis exemplo, faciem velo obduxit, hac ſui occultatione liberam intelligentis cujusque de iſta ſua lucubratione cenſuram audacter provocaturus, & manſvetè excepturus. Quæ n. morum perverſitas eſt, multos invidiâ premi videt, ob nominis ſui celebritatem, qui ob rectè inventa & benè dicta extollerentur, ſi nomen abeſſet: Siquidem, ut Lucretius ait,

Macerat invidia, ante oculos illum eſſe potentem,
Illum adſpectari, claro qui incedit honore,
Ipſi ſe in tenebris volvi cœnoq; queruntur.

Unde, Ovidio judice (ut verbis eius paullo immutatis utar)

Ignoti magè ſcripta placent, quia lædere notos
Liuor, & inviſo carpere dente ſolet.

Neq; verò æternùm auctor hic noſter latebit, ſed maſculam faciem ſuam mundo oſtendet, modò vita (quam diuturnam voveo) ſuppetat, animoſè omniq; rubore ſubmoto in arenā deſcenſurus, quamprimùm fuerit, qui ipſum oppugnaturus gladium ſtringere auſit. Etſi autem Veritas à ſe ipſa præſidium petens, aliena defenſione non adeò multum indiget, in qua & præſens ſcriptum confidenter acquieſcit; judicavi tamen, nec fortè abſque ratione, ſub Illuſtriſs. nominis tui patrocinio, Princeps Celſiſs. publicè illud prodire debere; cùm & res Mathematicas æternâ tuâ cum gloriâ verè ames ac rectè intelligas, & tuæ auctoritatis ſcuro contra Zoilorum malignos impetus facilè tutari poſsis. Velle n. tum ex illuſtris argumenti, Illuſtriſsimo favore tuo digni, quod tractat, gravitate, ipſum totius Trigonome-

nometriæ pariter atq; Aſtronomiæ fundamentum continente colligo; tùm ex benevolo tuo in tâm præclarum auctorem, qui ob eximiam ſuam eruditionem ſummâ cum modeſtia conjunctam, facilè in ſui amorem ſummos, imos, non tam allicit, quam trahit, affectu, certò mihi perſuadeo. In hac propitij Numinis tui fiducia, Princeps Clementiſs. deſino, DEUMq; veneror, ut Illuſtriſs. Celſitudinem Tuam longum incolumem ſervet. Hamburgi a. Kal. Januar. exordientes annum Epochæ Dionyſianæ à nato Chriſto CIↃ. IↃ. CXXVII. cujus multorumq; ex ordine ſequentium decurſus, Illuſtriſs. Celſit. T. eveniat ſalutaris, lætus, tranquillus.

AUCTOR AD CYCLOMETRIAM suam.

ERgo, libelle brevis, spatiosum exibis in orbem,
In Te nam fulgens Orbis imago patet.
Scilicet in Circum *cœlum terramq; rotavit*
Principio rerum Conditor omnipotens.
Corpora præterea celsi intra mœnia Cœli
Multiplici nexu Circulus *unus obit.*
Sidereos motus, quos claro cernis Olympo,
Multiplici cursu Circulus *ipse regit.*
Temporis ut possit nosci discrimen ab ævo,
Illius atq; vices, Circulus *ipse facit.*
Addo, venturos imbres qui nunciat Arcus
Nubibus impressus fingitur intuitu.
Quin & guttatim pluviæ descensus ab alto
Mentitur formam, Circule *parve, tuam.*
Res faciles flecti sensim torquentur in Orbem,
Quos inimica premit vis, sed amica trahit.
Vermiculos conchasq; vides, quas Helice Circus
Conservat mirâ commoditate frui.
Pondera quinetiam justâ exploranda bilance
Librantur radio, Circule, *cuncta tuo.*
Sic sonus ad patulas penetrando pervenit aures,
Cum nexu Circi *mobile carpit iter.*
Cernis ut indomitus, nutu sessoris in Arcus
Excurrens varios, arte domatur Equus.
Quid multis? toto Naturæ vultus in Orbe
Hùc se componit Circulus *ipse siet.*

Circu-

Circulus *in varias dissolvitur arte figuras*
Quas idem in numeros promovet arte pari.
Nonne vigent Circo *bene Dogmata cuncta Trigoni,*
Quidquid & abstrusi docta Mathesis habet?
Cur igitur refugis Circi *vestigia plani*
Sollicita curâ quærere quâ recidunt?
An qui mensurâ numerové & pondere *cuncta*
Disposuit, vetuit quærere quâ recidunt?
O Mortale genus, tua sunt, quæ morte supersunt;
Vivitur ingenio, cetera mortis erunt.
In tenui labor est mutare Rotunda Quadratis,
Singula dum verâ providus arte regit.
Nil extra est Olei, nil intra est in nuce duri,
Mensuram propriam Circulus *intus habet.*
Admoveas mentem saltim, quâ ducit Apollo,
Invenies mecum limina quæ reserat.
His, quæ, parve liber, fuerant per secula clausa
Apponis mirâ dexteritate frui.
Quamquam nulla dies tua Dogmata firma refiget,
Quæ natura tibi primitus inseruit:
Is tamen interea lateat, qui tempore longo
Pernici cura talia luce locat.
Cur lateat, quæris? dicam, quæ tempora cudunt,
His ne pro meritis audiat immeritò.
Orbis qui justas mensuras intulit Orbi,
Huic sit in Orbe locus, perfice, JUSTITIA.
Invidiam miseram superando illæsus abibit,
Si quem non videat Zoilus invideat.

PRÆ

PRÆFATIO
IN
CYCLOMETRIAM,
AD
Lectorem Mathematicum & Philomathem.

NIsi, benevole Lector, animum aliquando Cyclometriæ factioni adjeciſſem; curam & ſollicitudinem multorum annorum in eandem locâſſem, multaq; intereà fruſtrà tentaſſem; quin & perplures Mathematicos idem hinc inde à prima fermè litterarum memoria feciſſe, nec dum in ea quidquam ſolidè perfeciſſe, advertiſſem; Profectò nunquam credidiſſem, humanam mentem tàm alta caligine eſſe obductam, ut illa per avia & infinitos errorum Mæandros quæreret, quæ ipſam rem, de qua Quæſtio eſt, debite perſcrutanti facilè obvia ſunt; imo varijs modis ſe inſinuant, & ultrò intellectui noſtro applicari gaudent; etiam ea, quæ in Natura abſtruſa & abſcondita videntur, modò prius debita circumſpectione & deliberatione, quæ ſoli homini inter omnes creaturas à Deo conceſſa eſt, ſatis, ſecundum Naturæ cujuſq; indolem, ventilata ac diſcuſſa fuerint; & hinc priùs media legitima excogitata, quibus operatio in illis ritè ad finem perducatur, quàm temerè in exſequutionem trahatur. Quid enim, quæſo, Alchimiſtæ, qui auro illi famoſo, quod factitium nominant, in lucem & uſuram mortalium producendo, tam ſollicitâ curâ & operatione incumbunt, uno ore fatentur? Certè illud pleriq;, materiam auri, ut & aliorum metallorum, in Mercurio terreſtri reſidere, modum verò, hunc, qui ſua natura lubricus eſt, figendi, præparandi, & demum in aurum optatum exaltandi, anxiè duntaxat quæri: hoc eſt; veram methodum per legitima media procedendi à plerisq; ignorari: quæ ſi patefacta fuiſſet, & operatio juxta eam debito modo adminiſtrata, profectò illuſtris ille Treviſani olim Comes Marchionatus, & alij hujus auri repertores nihil ferè ejus factione in Natura facilius eſſe autumant. At cur non idem de Quadratura vera circuli dicendum. quam tot & nobiles & ignobiles Mathematici hactenus fruſtra quæſiverunt, veram ac legitimam viam ejuſdem inveniendi nondum ingreſsi: velut in hoc Cyclometrico tractatu requiſita ad circulum verè ac perfectè Quadrandum diligentiâ, quâ par eſt, perponderans mecum fatebitur: Nec inter Mercurium illum, ac Circulum noſtrum analogia adeò inepta & inconcinna cernitur. Etenim quemadmodum ille volubilis ac inconſtans eſt, adeò ut ſuper planum effuſus in globulos ſe rotundet, nec ſe, niſi ab arte, figi patiatur: Sic hic ſuper plano exacto conſtitutus, ac minimè in ullum latus plus minusvè reclinatus à motu non quieſcit; In plures præterea ſe partes, ut Lunulam Quadrantis, &c. diffundit, rectilineis figuris magnitudine æquales; licet ipſe totus antehac ad æqualitatem cum hiſce non ſit redactus. Præterea ut Mercurius mater ac materia omnium metallorum eſſe creditur; Sic Circulus, quia ultimus figurarum eſt, ipſarum omnium δεκτικὸν ſeu receptaculum reperitur, ut & Sphæra, quæ à circulo velut baſi exſurgit, omnium corporum ſolidorum, imprimis autem quinq; regularium: ut ſunt Pyramis, Cubus, Octoêdron, Dodecaêdron, & Icoſaëdron: quæ circulo in certa laterum ſuorum dimenſione cum diametro hujus inſcribuntur, & ideò divina corpora à Mathematicis vocantur, quorum Geometriam Euclides ultimis στοιχεώσεων libris luculenter perſequitur. Deniq; ut Alchymiſtas perplurimos, dum aurum in Mercurio impuro illicitè

quæ-

I.

CYCLOMETRIÆ

CAP. I.

Circulus quid? Quadratio circuli quid? Communes circuli affectiones cum figuris rectilineis in primis Triangulo, velut figurarum primo. Deniq; cur Tetragonismus circuli à Mathematicis tantoperè exoptatur?

CIrculus, definiente Euclide, est figura plana sub una linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales. *Def. 15. li. 1.*

Hoc punctum centrum circuli appellatur. *Def. 16 li. 1.*

Hæc figura quantum â Philosophis commendatur, id potiùs in monumentis ipsorum quærendum, quàm heic multis exaggerandum puto. Aristoteles & hanc in planis figuris principatum obtinere, & maximè admirabilem esse, causis adjectis contendit. Quinetiam N. Copernicus omnem motum naturalem circularem esse censuit, imò non censuit solum, sed adversus Ptolemeum & antiquos plausibili argumento disseruit. *Aristoteles l. 2. de cælo c. 4. item in Mechanicis quæst: lib. 1. Rev. cap. 8.*

Porro quemadmodum triangulum rectilineum prima omnium figurarum est, in quam scilicet ceteræ in plano rectilineæ resolvi possunt: Ita circulus figurarum ultima est, & inter omnes Isoperimetras capacissima, quam in triangularem perfectè resolvere ἀδύνατον non est, ut infrà, Deo volente, patebit.

Quoniam verò triangulum quodvis facilè in quadratum reducitur, ideò cõcessâ magnitudine circuli in comparatione cum triangulo, aut quovis alio rectilineo, eadem, postea, operâ, quâ illud, quadratur. *Prop. 14. l. 2.*

Circulum igitur quadrare nihil aliud est, quam ejus aream æqualem figuræ rectilineæ invenire, ut rectè Joseph Scaliger pronunciavit. *Quadrare circulum quid.*

Ut autem quævis aliæ figuræ in plano similes ad imperatam analogiam per homologorum laterum duplicatam rationem, seu quadrationem augeri, minuiq; possunt; Sic quoq; circuli eodem modo, datis quibusvis eorundem lateribus homologis inter se augeri minuiq; possunt. Latera autem in hisce homologa sunt, vel diametri cum diametris, vel peripheriæ cum peripheriis, vel deniq; quævis similes circulis comparandis subtensæ. Quin & partes circulorum, & omnium figurarum similium easdem rationes ad invicem habent, quas tota; quod de lateribus homologis, & horum partibus symmetris in simplici ratione intelligendum est, de planis in potentia seu ratione duplicatâ.

Ad hoc ut reciproca via sit, aream figuræ rectilineæ cujuscunq;, è datis lateribus, quærendi, & data areâ in parallelogrammo, & triangulo, cum uno laterum, rursus reliqua latera restituendi, eodem modo in circulo (contra mentem Scaligeri) contingit; adeo ut neq; heic necessum sit, inventa alterutrâ, vel

peripheriâ, vel area, dum Diameter, aut alia ſubtenſa nota exponitur, alteram extra communem rationem in triangulis & parallelogrammis operosè indagare. Ex hac autem διασκέψει æquè Archimedis propoſitio prima de Circulo, imò facilius longè demonſtrabitur.

Deniq; inventa linea aliqua recta peripheriæ Circuli ſymmetra, quando hujus Diameter rationalis exponitur, ipſe profectò Circulus in comparatione cũ parallelogrammo à tali linea recta velut uno latere conſtructo abſolutè quadrari poteſt, ſi modo alterum latus ejusdem parallelogrammi Diametro Circuli ejusdem fuerit ſymmetrum, vel in eadem altitudine tale parallelogrammum cum eo, quod Circuli aream continebit, reperiatur: Nam & hæc quadratio *paraboles* apud Archimedem eſt.

Prop. 2. li. 6.

Atqui hæ, & ſi plures eſſe poterint, affectiones communes Circuli cum rectilineo, hactenus ferè neglectæ mirum, in quos labyrinthos *Quadraturam* Circuli conjecerunt, & ſcopum ad ejus perfectionem veniendi, ad quem Circulus ſuâ ceteroquin naturâ contendiſſet, ab aſpectu mentis ſubmoverunt.

Interim autem quæritur cur tanta cupido homines Mathematicos à prima literaria ætate inceſſerat Circulum rectilineo permutandi?

1. An quia figuram illam circularem in ſua menſuratione planè cognoſcere geſtiebant, intra quam lineæ rectæ continentur, quarum comparatione omnes proportiones in lineis & numeris inter ſe inſtituuntur, ut in Trigonometriâ circulo planè orta, experiri licet.

2. An quia figuræ conicæ, nempe *Ellipſis* & *Hyperbole* ſuas menſurationes è circuli menſura capiunt?

3. An verò quia Circulus, qui non ſolum Sphærici corporis baſis, imò effector eſt; Sed & pyramidis rotundæ, Cylindri, doliorum, & in univerſum omnium Circularium ac cylindraceorum corporum, prius in veram menſurationem cum rectilineo veniret, quàm ut dicta corpora debitè, per numeros menſurari, aut cum corporibus è baſi rectilineari exſurgentibus rectè permutari poſſent?

4. Deniq;, an quia duo ſaltim ἄποροι in Geometria reſtare videntur, quæ inventu difficilima apparent; nempe *Quadratura*; & *duæ mediæ lineæ* inter quatuor continuè *proportionales*, quarum tamen extremæ modò datæ fuerint mediæ ſatis perfectè ad numeros cubicos inveniri poſſunt, & ceteroquin per *Meſolabium* quodammodo; *Circulus* autem tàm contumacem hactenus conatibus etiam ſummorum Mathematicorum ſeſe exhibuit, ut hi omnem exactæ quadrationis circularis ſpem abjicerent, & impoſsibilitati (nec tamen hactenus demonſtratæ, ſed ſolum ſibi perſuaſæ) concederent, poſtquam deſperarent proportionem periperiæ circuli ad hujus Diametrum perfectè ab ullo homine inveniri poſſe; nec etiam abſolutè unquam invenietur, quandoquidem hæ lineæ aſymmetræ ſunt, ut infra patebit.

CAP.

CAP: II.

Recensio trium diversarum opinionum, quas diversi Mathematici de Quadratura Circuli hactenus foverunt, cum ipsarum dijudicatione.

PRoblema hoc famosum, *An Circulus perfectè possit quadrari?* in varias opiniones distractum invenimus. Sunt enim ac fuêre, qui id omnino negant in Natura reperiri; Sunt qui in Natura quidem perfectam quadrationem Circuli esse fatentur; verum vix â quoquam posse inveniri; Sunt deniq; qui & in Natura exstare, & sine dubio diligentiâ ac debitâ dispicientiâ adhibitâ reparabilem esse contendunt: Quorum sententiam veram esse eventus in progressu hujus tractatus, cum bono Deo, comprobabit.

Qui Circuli *tetragonismum* negant, ita pro defensione suæ sententiæ nonnulli argumentantur:

Finiti ad infinitum nulla est proportio; Circulus est polygonon infinitorum (à Centro ad circumferentiam undique) angulorum; Ergo certa mensura determinari non potest. In hac sententia; licet non hisce verbis expressa, fuisse videtur Archimedes celeberrimus omnium ætatum Mathematicus, dum infinitati angulorum istorum concedens, polygonon saltim 96 laterum seu angulorum à centro adsumendo, & δίχοτομίαν in his insequendo, Circuli peripheriam, utcunque in anologia cum Diametro ostendit; Quem Neoterici, Ludolphus de Coeln, & reliqui Analytici insequuti sunt, polygono infinitorum ferè, nempe 1073741824. aut etiam plurium laterum, in δίχοτομίας suæ πραγματείαν assumto, quo certius eandem analogiam perimetri ad Diametrum venari se posse confisi sunt.

Huic quoque classi adnumerari possunt, qui intermediis temporibus inter Archimedem & nostrum ferè sæculum fuêre; ut sunt Dinostratus, Nicomedes & alii, qui linea involuta, & eâ quam τετραγωνίζουσαν ab officio suo vocabant, negotium hoc ita aggressi sunt, ut tandem eandem lineam dividendo, & cum quadrato peripheriæ conferendo, in ultimam sectionem similiter desinerent, ut apud Pappum Alexandrinum & Christophorum Clavium Lectori cognoscere licebit. Denique in hoc censu numerandus mihi videtur illustris ille Mathematicus Parisiensis Franciscus Vieta, qui aliquot in locis operum suorum ἀδύνατον τετραγωνισμὸν innuere videtur. Primò his verbis: *Lineam rectam (Analyticus) curvæ non comparat, quia angulus est medium quiddam inter lineam rectam, & planam figuram. Repugnare igitur videtur homogeneorum lex.* Et alibi. *Circulos nemo quadravit artificiosè: ut neque Circulorum* τομέας *neq; τμήματα; causa est quia perimetri ad Circulum* ἀναλογία ἐν θεῶν γένασι κεῖται.

Pappus li. 5. collect: Mat. Clavius in fine libri 6. com: in Euclid. Cap. 8. in artem Analyticam. Lib. 8. respon: cap. 9. prop 2.

Sed syllogismum primò occurrentem breviter examinabo. Propositionem hujus quod concernit, vera quidem illa est, quousque illud quod infinitum est, finito opponi possit; verum in assumto nullam horum fieri oppositionem facilè natura & origo lineæ tàm rectæ quàm curvæ demonstrat. Etenim quum angulos hosce polygoni (vel potius holygoni, ut Philosophus vocat) infinitos peripheria circuli, quæ linea finita est, mensuret, eaq; non secus

ac linea recta fluxu infinitorum punctorum creetur: Si igitur ob id infinita censebitur circuli peripheria, non video quomodo quicquam in Geometria finitum ac determinatum demonstrari possit. Interim autem id verum esse largimur, quod modò nulla alia via ad *tetragonismum* exstaret, præter eam, quam Archimedes & analytici urgent, & hi unicè inprimis sequendam: tùm certè nulla quadratio circuli finita foret. At illud juxtâ scire oportet, quod Epictetus dicit: *Rem scilicet omnem duas ansas ad operandum porrigere unam difficilem*, & ego addo, numquã legitimã; *alteram facilem*, quæ sine dubio ab ipsa indole Naturæ emanat.

Epictetus in pugione vitæ humanæ.

Hæc, quam deinceps in hoc tractatu sequimur, non immeritò ἔντεχνος vocatur, nec quicquam, ut altera, quæ ἄτεχνος est, operosum habet, ubi semel via ad eam patefacta fuerit.

Vieta cap. 15 lib. 8. Resp.

Restat in hac prima opinione illustris *Vieta*, cujus effata superius citata, quia nusquam demonstrata reperiuntur, nulla necessitate absolutam *quadrationem* circuli excludunt. Præterea primum illud *Vietæ*, si vel verum esset, non nisi de diametro intelligi meritò poterit. Alterum similiter de iisdem: alias enim postquam linea recta, quæ latus est trigoni inscripti, curvæ symmetra ostẽsa fuerit, etiam analogiam ipsius ad circulum, seu peripheriam ejus ostendi posse non amplius ambigemus.

Ad secundam opinionem veniemus, cui Hippocrates Chius meritò, Aristotelis judicio, præficiendus est, etiam postquam Menisçum Tetragonicum, pro hexagonico quadrando spe perfectæ Quadraturæ cecidisset; Nam ipsum principiis insistentem paralogismum non admisisse Philosophus affirmat. Et certè ita esse videtur, ut dum una circuli pars, quæ Lunula includitur, in rectilineum tam promptè transiliat, totum circulum haud invitò sequuturum; modò ad id justa media adhibita fuerint. Sed quia ea in Natura nondum inventa esse Aristoteles sensit, ideò & ipse intra hanc classem manens Quadraturam Circuli scibilem quidem, at vix parabilem existimavit; quasi uni Aristoteli tota Natura recluſa fuisset, qui tamen ubi causas fluxus atq; refluxus marium capere minimè posset, se flumini propè mare capiendum spontè obtulisse dicitur.

Aristoteles in Sophist:

Comm: in Archim:

Ad ultimam deniq; classem inprimis Eutocius Ascalonita referendus mihi videtur, qui lineam rectam in Natura exstare peripheriæ Circuli æqualemà nemine dubitari voluit, his verbis: ἔιναι τινὰ τῇ φύσει ἐυθεῖαν ἴσην τῇ περιφερείᾳ τοῦ κύκλου, πρὸς οὐδενὸς ἐσὶ ζητούμενον. Nam si ulterius in talis lineæ naturam diligenter inquisivisset, reperisset utiq; eandem, ut secundum totam, sic omnes veras suas partes, partibus veris peripheriæ commensurabilem esse, & sic liberè exclamasset; Circuli *Quadraturam* exactam, impossibilem minimè fore, veluti, Deo auxiliante, liquide satis infrà talis demonstrabitur.

Atque hæc breviter & generatim pro tripartita opinione de absoluta Circuli *Quadratura* censenda prælibavimus; Nunc quorundam præcipuorum Cyclometricorum conatus pro eadem in specie exponemus, antequam in nostram πραγματείαν ex proposito fuerimus inducti.

CAP:

CAP. III.

Elenchus præcipuorum quorundam Cyclometricorum, quorum conatus pro Circuli mensuratione in vulgo exstant,

ETsi in monumentis eorum, quos nunc commemorabimus, ut & aliorum in universum, qui hactenus de hoc argumento scripserunt, nulla perfecta Quadratura Circuli tradatur; partim quia hypotheses ipsorum, quibus Circuli mensura alligabatur, falsæ fuerunt; partim quia numeri irrationales, quibus sectatores Archimedis præcipuè utuntur, justam præcisionem ad deductionis ἄκρον haud subministrare poterant; tamen Epilogismos singulorum, quos recensebimus, breviter examinare lubet, ut postea constet, quantum ultrà citraq; à vera Circuli mensura hi omnes aberraverint; & quia nulla hactenus ἀπόδειξις Archimedis firmior fuerat, quâ ostendit, mensuram Circuli, ejusq; circumferentiæ inter polygonon inscriptum & circumscriptum angulorum parium versari, nec praxis in numeris hâc certior, quæ intra eos finesmanserat, penes quos justa proportio quodammodo salvari poterat, Circulo in 96. æquales partes duntaxat diviso. Quocirca utroq; Archimedis Epilogismo inter se collato, atq; ita limitato, ut ad medium reducatur, terminos proportionis seu rationis Perimetri ad Diametrum veritati adhuc longè proximiores, quàm positi prius fuerant, nempe quam $3\frac{1}{7}$ & $3\frac{10}{71}$ adducemus, & hinc reliquorum industriam, quatenus sic numeris discerni poterit, censebimus. Siquidem medium extremis veritati semper propiùs esse ab omnibus sanæ mentis agnoscitur.

Collatio terminorum extremorum Archimedis qui in Epilogismo ejus inveniuntur; Et ad medium reductio.

Quandoquidem resolutio Polygoni circumscripti & inscripti laterum 96. è datis Archimedis passim in numeris exstat, tùm apud ipsum Archimedem, tùm Clavium in Geometria Mechanica, Item Petr. Ramum in Scholis Mathematicis, & alios; Proinde Epilogismum saltim heic pro medio inquirendo adaptabimus. Ex hoc autem Epilogismo figuræ 96. lat: circumscriptæ Circulo, Diameter ad Perimetrum inventa reperitur, ut: $4673\frac{1}{2}$ ad 14688. Ergo positâ Diametro 2000000, ut 2000000 ad 6285653. *Prop. 2. de Circulo*

Figuræ verò inscriptæ totidem lat: nempe 96. Diameter ad perimetrum ex resolutione ostensa est, in ratione quæ est $2017\frac{1}{4}$ ad 6336. Ergo suppositâ & heic Diametro circuli 2000000; ut 2000000. ad 6281819. Proindefactâ limitate ad medium reductione, ratio erit Diametri ad Perimetrum, quæ est numeri 2000000 ad numerũ 6283736: quæ recepta consuetudine ita exponitur $\frac{6283736}{2000000}$.

Et quoniam rectangulum, è radio & dimida circumferentia æquale est areæ Circuli, erit ipsa circuli area 3141868000000, qualium diameter circuli est 2000000. Hæc mensura limitata est, hoc est, ad medium, ut dixi, utriusque Archimedeæ inventionis reducta, quæ â veritate haud longè distare potest; Erit tamen juxta rationis exigentiam peripheria Circuli numero posito paullò minor. Quia enim Circulus omnibus aliis figuris Isoperimetris major est, ergo etiam major utriusq; figuræ nempe circumscriptæ & inscriptæ complicatæ dimidio; ut ob id peripheria aliquantò minor fiat, quamvis circa ultimum segmentum 96. lat: Polygoni vix id sensibile erit. Ex Analyticorum verò, qui in praxi Diametrum fixam in numeris retinent, cujus- *Archim: Prop: de Circulo.*

dam labore, ratio perimetri ad Diametrum in eodem ſuppoſito Polygono 96laterum inventa eſt $\frac{6283745}{2000002}$, dum ſimiliter termini extremi ad medium limitate reducuntur. Fit namq; illi Perimeter è circumſcripto polygono 96 lat: 6285428, ex inſcripto autem totidem laterum 6282063. qualium ſimiliter Diameter eſt 2000000.

Ex hac, pro Archimede, limitatione, quæ medium reſpicit, quæq; proximè in iſta ſectionis pragmateia ad veritatem accedit, quia, ut dixi, conatus ceterorum Cyclometricorum quodammodo cenſeri poſſunt; Primò nobis *Antipho* velut omnium, qui de Cyclometria meditati quædam leguntur, vetuſtiſsimus occurrit. Hic licet Orator Athenienſis fuerit, tamen & hæc de Circulo olim prodidit; nempe, *Quadratum proportionis mediæ inter inſcriptum, & circumſcriptum Circulo Quadratum areæ ipſius Circuli æquare.* Quod quam impertinens fuerat, ſtatim in numeris arguemus. Etenim quùm conſtet Quadratum Circulo inſcriptum circumſcripti ſubduplum eſſe; Si igitur Diameter Circuli ponatur 2. part: Quadratum ab eâdem Diametro circumſcriptum 4 part: erit: Inſcriptum verò 2 part: Quæ inter ſe multiplicata efficiunt Octogonium inſcriptum ✓ 8, cujus radix eſt 28284, Siphris additis. Et quia illud idem eſt cum Quadrato medio, patet igitur inter medium Quadratum & inſcriptum rationem eſſe, ut: 28284 ad 20000. & ad circumſcriptum ut: 28284 ad 40000, id eſt, potentiam infimi ad medium eandem, quæ medii ad ſummum, nempe ſubduplam. Si autem nunc Octogonium Circulo inſcriptum, ſeu quod Quadratum medium nominatur, areæ Circuli æquale foret, hoc inde primò ſequeretur, quod pars, hoc eſt, Octogonium inſcriptum toti Circulo eſſet æquale, hoc eſt, pars toti, quod eſt abſurdum. Deinde ex numeris idem patet. Etenim area Circuli Archimedea limitata erat 31418: Hæc verò 28284. Differentia igitur nimium notabilis eſt, nempe 3134. part: in tàm exiguo pro area numero, quâ à veri tramite quàm proximè Antipho olim deflexit, ut ob id in Bryſonis reprehenſionem juſtè inciderit. Et quamvis ex hoc fonte quomodocunque reſarto & reſtaurato, *Orontius* Finæus Gallus *Tetragoniſmum* derivari poſſe putaverit, tamen ipſius conatus ſimul fruſtraneus fuerat, quum neque ad numeros tolerabiliter revocari poſſet.

Sequitur *Hippocrates* Chius, qui ex Mercatore Geometra factus fuiſſe ſcribitur. Hic dum Meniſcum ſeu Lunulam Sexangulam quadraturus eſſet (quippe cujus menſurâ in rectilineo manifeſtatâ, area Circuli illico pateſcit, ut paullò infrà in hoc tractatu oſtendemus) in Quadrationem Lunulæ Quadrantis incidit, qua nihil ferè facilius fuit. Nihilominus ab Ariſtotele ob inventionem laudatur, non etiam exſequutionem. Nec enim ſecùs Hippocrati huic accidit, atque pictori cuidam, qui Leonem effigiaturus, urſum pinxit. Tribus quidem Lunulis cum Semicirculo, vel quatuor cum Segmento Hexagoni ad exhauriendum Semihexagonum inſcriptum opus fuiſſe rectè Hippocrates oſtendit, ſi in Meniſco hexagoni quadrando manſiſſet; Sed dum Quadrantis Lunulam quadravit exructam ſuper baſi, latere nimirum Quadrati inſcripti, planè ſe ipſum, & poſteros fefellit, præſertim res Mathematicas minus intelligentes; Siquidem talis Quadratio modo ipſi ad numeros revocetur, quia Lunula Tetragonica, quam quadravit, æqualis eſt $\frac{1}{4}$ Quadrati inſcripti: poſito igitur radio 1. part: erit Lunula Quadranguli ✓ $\frac{1}{4}$ & quadrupla facta ✓ 4. At Semihexagonum inſcriptum eſt ✓ $1\frac{1}{16}$. Igitur Lunula illa Quadrupla Semihexagono inſcripto longè major, imò longè major ipſo Semicirculo reperitur, quum illa reſoluta,

Antipho.

Prop. 47. l. 1.

Vide Ioſeph: Scaligerum ſub initium ſuæ Cyclomatriæ.

Orontius.

Hippocrates Chius.

Ariſtoteles in Sophiſt.

luta sit ut priùs $\frac{3000000}{1000000}$ Semicirculus autem ex prioribus numeris Archimedis limitatis vix $\frac{157094}{100000}$, ut etiam hinc error Hippocratis facilè convincatur.

Ad *Archimedem* denuò revertimur, ut ordo quodammodo servetur. Ejus de Circuli mensura ad duas propositiones potissimùm restringuntur, quarum prior est: *Triangulum Orthogonium cujus alterum crus circa angulum rectum est radius Circuli; Alterum vero peripheriæ ejusdem æquale, adæquat aream Circuli*: Ergo oblongũ seu rectangulũ à radio & Semiperipheria Circuli est area ipsius Circuli, & media proportionalis inter latera bina tale rectangulũ cõstituentia est latus quadrati areæ circuli æqualis, ut invento rectangulo Circulo æquali haud operosius pro ipsius Quadratura laboremus. Ceterum non modò hæc nominata latera, sed proportionaliter inter se multis rationibus mutata, & alterata areã Circuli restituũt, adeò ut ex hujus Archimedis propositione, quæ non modo Circulo, sed omnibus triangulis ac parellelogrammis ex æquo cõpetit, ut scilicet è perpendiculari, & dimidio latere, in quod ista incidit, ac versa vice, areæ ipsorum oriantur, consectarium hoc emanet; *Nullam scilicet partem, peripheriæ Circuli determinatam dari, quin ex hac & conveniente Linea recta Diametro Circuli ejusdem Longitudine Symmetra rectangulum constitui possit, areæ ejusdem Circuli æquale*, ut infrà suis locis ostensuri sumus.

Archimedes.

Prop. 1. l. 6.

Prop. 14. l. 2.

Consectarium è prop. 1. Archim. de Circulo.

Vide Lem. 20 cap. 4.

Altera Archimedis propositio, qua conatus est, data Diametro peripheriam in iisdem numeris acquirere, in superioribus ventilata est, & authoritas Archimedis, ut par est, defensata. Ceterum quamvis certissimum est, quod peripheria Circuli, adeoque tota mensura ejus versetur inter polygonum inscriptum & circumscriptum æqualium angulorum; Porrò quò Polygonum hujusmodi ordinatum plurium laterum fuerit, eò propius laterum horum, quæ Centrum Circuli respiciunt, complicatione ad peripheriãm acceditur, inscripto quantitatem minorem, circumscripto autem majorem peripheriâ perpetuò relinquente; tamen Sectionis *theoria* ad *praxin* numerorum revocata, ubi in ultimis quasi segmentis præcisè habendis, eorumque collectione, peripheria constituetur, quum semper aliquid ultrò citroq; numeris Quadratis irrationalibus adhæreat, quod in radices plenè derivari nequit, non major heic quam in Canone Trigonometriæ circa minutias, certitudo esse poterit, imò tantò minor quantò pluribus tota peripheria constiterit segmentis. Qui igitur radices ad ultimum salvare velit, & interim fateri, hæc, quæ dixi, incommoda, penes radicum defectus, singulis operationum vicibus, residere (ad quam confessionem eum profectò necessitas cogit) in hoc absurdum præter alia, procul dubio, incidet, ut effectum causis suis toto genere sumptis præstantius seu absolutum magis esse admittat, quod axiomati Logices inprimis adversatur. Nec etiam de facto in numeris Analyticorum, sed potius de eo quod fieri debebat, nec tamen unquam fit, aut fieri poterit, jure quærimus & disserimus. Sed quo digredior? quũt pro certo affirmare audeam, Archimedi nunquam in mentem venisse, Cyclometriam hac sectionis factione ultra Mechanicam efferre velle, aut posse (ut viderint illi, cum quo ad veritatem successu, qui terminos ejus in hac sectionis pragmateia transilierint) Nam id in seqq: satis artifex ille indicavit, dum & peripheriam ad Diametrum adhuc ultra inventum terminum usurpavit, nempe $3\frac{1}{7}$, & hinc demonstravit Quadratũ ex Diametro Circuli, ad Quadratũ areæ ejusdẽ esse ut: 14 ad 11, omnia scilicet lato modo mensurando. Non enim hæc praxis, aut inventio ἐυτεχνῶ erat, ob quod eã nec Circulo ultra Polygonon 96 laterum accommodavit Archimedes, sed quia numeros ipsius subtiliori limitatione, quã etiam Petrus Ramus in suis scholis Mathem: prius exposuimus, idcircò Archimede relicto, ad sequentes nos conferemus.

Vieta lib. 8. cap. 15. responſ.

Inter

Dinostratus & Nicomedes quos ordo hic ponit etsi Archimede priores fuere.

Inter hos autem, quos deinceps recensebimus, primò *Dinostratus & Nicomedes* adsunt, qui conjunctâ, ut videtur, operâ lineam, quam τετραγωνίζουσαν vocabant, intra quadrantem Circuli fabricari suntaggressi, quam Pappus Alexandrimus fusè exponit & rectè inutilem esse judicat ad *tetragonismum* circuli perficiendum, eò quod oporteret Quadrantis peripheriæ rationem prius notam esse cum radio, quam alia (præter Mechanicam) ratiocinatio de hac linea institui posset. Deinde ultimus ejusdem lineæ terminus discretè inveniri non potest, utut Clavius multum & operosè pro illa inventione laborat, & pro numeris huic pragmatejæ adaptandis; quos tamen, quandoquidem ex ultimis sinubus Canonis mutuatur, & huic rationem Semiperipheriæ Circuli ad radium exstruit $\frac{3\,1\,4\,1\,7\,3\,0\,7}{9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9}$; id inquam licèt numeris Archimedeis prius limitatè expositis mediocriter conforme est, nihilominus in se petitionem principii habet, ut Pappus censuit, eò quod veritas ultimorum Segmentorum seu Sinuum Quadrantis adhuc in controversia hæreat.

Clavius Comm: circa finem lib. sex. Euclid:

Nicol. Cusanus.

Ab hisce ad virum reconditæ olim scientiæ *Nicolaum Cusanum Cardinalem* descendemus, qui in operoso isto tractatu de Geometricis Mutationibus, lineam quandam *contingentiæ* à se inventam ad Circuli *Quadraturam* accommodat, quæ postea à Ludolpho resoluta ac determinata est, hincq; inventa ratio perimetri ad Diametrum, ut 31423. ad 100000. Cetcrum id quum Archimedeam mensuram nimium excedat, pro legitima haberi nequit.

Simon à Quercu.

A *Cusano* ad *Simonem à Quercu* properamus. Hic Hypothesin ad rationem inveniendam inter Diametrum & Peripheriam Circuli talem statuit:

Si duæ lineæ rectæ ab extremis terminis Diametri Circuli descriptæ, quarum una tangens Diametrum, altera partem Semicirculi qualemcunq; subtendens, ita Orthogonium cum Diametro fecerint, ut subtensa partis Circuli & dicta tangens inter se æquentur: Erit utraq; harum seorsim sumpta æqualis peripheriæ Quadrantis Circuli. Hæc propositio seu hypothesis, etsi postea ab *Vrso Dithmarso* (verè Urso) & *M. Petro Crugero Borusso* repetita sit, & unicè ad hoc negotium Cyclometricum accommodata: tamen quia vix ulla præter suppositionem, vera & necessaria demonstratione nititur, proinde ad numeros duntaxat examinata, vim & veritatem, quam habet in hoc argumento, patefaciet. Hic autem Canon Triangulorum nobis ideo sufficit, quia ex medio quasi ipsius, numeri absq; sensibili errore inde depromi poterint, Propè igitur ad rem per aliquot subsumptiones adducti invenimus angulum subtensæ proximum esse 103 gra: $39\frac{1}{2}$ M: cui respondet *subtensa* 15722832. complementum autem ejusdem anguli ad Semicirculum est 76. gra: $20\frac{1}{2}$ M: Et ideò ejus dimidium 38. gra: $10\frac{1}{4}$ M: cui respondet *tangens* 7860984 & ideo ejus duplum 15721968. qui numerus à superiore differt saltim 864. particulis extremis. Limitata igitur ad medium erit linea hæc 157224. qualium radius Circuli est, 100000. Si ergo inventa illa linea erit peripheriæ Quadrantis ejusdem Circuli æqualis, ut hypothesis habet, tunc erit ratio Diametri ad integram Peripheriam $\frac{3\,1\,4\,4\,8}{1\,0\,0\,0\,0\,0}$, quæ quidem longè terminos Archimedis limitatos excedit: Erat enim illic mediũ in ratione $\frac{3\,1\,4\,1\,8\,2}{1\,0\,0\,0\,0\,0}$.

Atqui hinc absq; longiore ambage de hac *Simonis à Quercu* hypothesi quid censendum erit, se prodit, de qua etiam *M. P. Borussus à D. Melchiore Ioestelio* olim Mathematico Witebergensium præstantissimo per literas admonitus est, hanc scilicet suppositionem numeris minus congruere. Huic tempore, ut puto, pro-

ximus

ximus est illustris I: *scaliger*, qui præter alia celeberrima sua scripta apud Belgas promulgata, Cyclometriam in lucem edi curavit, qua nomen suum, satis anteà ob merita sua de bonis literis illustre, ferè, ut ipse loquitur, decoxit; dum *Archimedem* præter meritum redarguere præsumsit, & alia quædam in isto Tractatu admisit, & demonstrare conatus est Mathematico planè indigna, quamvis certè multa indidem inveniuntur solertiam ingenii redolentia. *Iosephus Scaliger.*

Equidem à quodam excellenti viro narratum memini, se Tractatum illum antea, velut ab alio authore, ad verbum descriptum vidisse, si id aliquid ad innocentiam *Scaligeri* facere posit; Sed ad rem.

Qui opus istud Cyclometricum legerit, inveniet *Scaligerum* totum Circulum seu aream ejus, nescio quibus fundamentis, posuisse 36. part: qualium Sectio hexagoni est pars una; Ergo sexta pars Circuli erit 6. part: quarum 5 triangulo æquilatero à radiis Circuli descripto sunt attributæ. Et quoniam dictum triangulum constat esse $\sqrt{\frac{3}{16}}$ qualium rad: supponitur. 1. p: Igitur pro eodem triangulo resoluto (quando convenientes sphræ adduntur) inveniuntur numeri 4330127000000000 qualium radius est 10000000. Ergo ut 5 ad 6: Sic 43301 270000000 ad sextam partem Circuli.

Erit igitur juxta Scaligerum, (dum veritati, quæ propositioni Archimedeæ potius, quàm commento Scaligeri inest, locum relinquimus) sexta pars Circuli heic 5196152400000000; & totus Circulus 31176914400000000, qualium Diameter ipsa ponitur 20000000. Vel lõgè faciliùs hoc modo: 5 dant $\sqrt{\frac{3}{16}}$, quid 36? ($\sqrt{\frac{243}{25}}$: quibus in rationales numeros resolutis provenit eadem ratio Diametri ad perimetrum, quæ prius. Ex his colligitur ratio Diametri ad peripheriã $\frac{3}{1}\frac{11}{00}\frac{76}{00}\frac{91}{00}\frac{44}{00}$ quæ quia à numeris Archimedeis nimium deficit, igitur talis mensura Circuli minimè admittenda est; & propterea jure à Vieta, Ludolpho, Romano, Christmanno & aliis damnatur.

Sequitur nunc præstantissimus F: *Vieta*, Mathematicus, Logista & Algebraicus in æquationibus rationalium olim incomparabilis; Hic inter alia sua scripta, quæ lucem viderunt (utinam ne præcipua invidia supprimeret) variaq; de Circulo tentamina hypothesin Cyclometriæ struxit, principiis ad eam stabiliendam è linea mediâ & extremâ ratione sectâ affluentibus, plausibiliter innixus; Quam quidem hypothesin in duabus propos: absolvit: una pro inventione Lateris Quadrati areæ Circuli æqualis: altera pro inventione lineæ rectæ Quadrantis peripheriæ æqualis, quas quidem lineas utrasq; per *Circinum* ac *Regulam*, primus quod sciam reperit, & Mechanicè ita tractavit, ut à veris quàm minimè deficerent. *F. Vieta.* *Lib. 8. Resp: cap. 3. & 4.*

Has propositiones Ludolphus de Coelln in numeros resolvit, reperitq; in utraq; mensuram areæ Circuli in numeris $1\frac{4}{5} \dagger \sqrt{1\frac{4}{5}}$ cujus Diameter ponitur 2 part: Quæ mensura in numeris solutis, 314164 00000 apparet, qualium radius Circuli est 100000. *Ludolph: lib. 4. Zetem:*

Verùm heic hypothesis duntaxat est, nec ex ea ulla Circuli Sectio cum toto rationalis ostendi potest. Præterea sectio lineæ mediâ & extremâ ratione, negotio huic Cyclometrico neq; convenit, ut postea ostendemus: Interim autem nemo hactenus fuit, qui propiùs Archimedis numerum attigit. *4. de Fundam Arith: & Geom:*

Relicto *Vieta*, *Ludolphum* de Coelln (hominem quidem in Arithmetica & Geometria laboriosissimum, & exercitatissimum: in linguis verò & reliqua philosophia ineruditum) proximum adsistimus. Hic sectionum vestigiis, ad *Ludolphus de Colln.*

Circuli menſuram oſtendèndam (quamvis praxi ab Archimede paullulum diversâ) inſiſtens, ex polygono adſcripto plurimorum nempè 1073741824 laterum & reſolutione irrationalium, qui in Tractatu ejusdem de *Circulo* exſtant, putavit ſe in longiſsimis numeris veram proportionem peripheriæ ad Diametrum aut veræ adeò vicinam elicuiſſe, ut nulla ſenſibilis differentia intercederet. Idem & reliqui putant, qui factionem Sectionis Ludolpheæ urgent. Nos ſuperſtitiosâ illâ numerorum eductione per tot ſiphras omiſsâ, & ultimâ ſcrupuloſitate neglectâ, ut collatio *Ludolphi* cum *Archimede* fiat, primò quia reperimus proportionem *Ludolphi* eſſe $\frac{3141592\,6}{100000000}$, non exiſtimamus fieri poſſe, quod à mediâ Archimedea limitata ratione Circuli menſura revera ita deficiat, ut differentia hêic tanta eſſe poſsit, præſertim circa ultima Segmenta, ubi ſubtenſæ cum arcubus, quorum ſubtenſæ ſunt, de pari quantitate contendunt. Et quia cauſa hujus rei in *Archimedis Διαρίσει* ſuperius ex parte inſerta eſt, parcius igitur hêic agemus, primò admonentes, quod poſtea, Deo auxiliante, oſtenſuri ſumus, nempe Analyticos non veras Cyclometriæ anſas habere; Secundò Syllogiſmum hunc adverſus eosdem producentes, qui hêic in hac forma concipitur:

Nulla major ſenſibilis certitudo ex irrationalium reſolutione per praxin Ludolphi & Analyticorum, ad ſubtenſas ultimorum quaſi circuli arcuum nempe ſecundorum aut tertiorum Minut: inquirendas demonſtrari poteſt, quam in aſſumtis rationalibus apud *Valentinum Othonem* pro Syntaxi Canonis Palatini &c. quum utramq; praxin commune præceptum gubernet; & tamen tales ſubtenſæ peripheriæ rationẽ ad Diametrũ unicè in Sectionis praxi componunt.

At haſce ſubtenſas Canon Trigonometriæ, qualis adhuc à Valentino aut quoquam conſtructus eſt, imperfectè circa ultima ſegmenta Quadrantis exponit, quod & Valentini & aliorum Mathematicorum ſententia eſt.

Ergo neq; ab illis, neq; iſtis debita certitudo rationis peripheriæ ad Diametrum, & per conſequens univerſæ Cyclometriæ, exſpectanda eſt.

Vel hoc modo breviùs: Conſtructio uſitata canonis Trigonometriæ, non eſt confectio Cyclometriæ: At Analytici verſantur ſuâ praxi in canonis Trigonometriæ conſtructione: Ergo non in Cyclometriæ veræ factione.

Atqui in tali ſtatu Sectionis praxin relinquo, certus de terminorum omnium in hoc ratiocinio demonſtratione, ut infra in Appendice exemplis declarabitur. Illud ſaltim hoc loco addo, mirum mihi videri, Ludolphum & ejus aſſeclas Circuli menſurã ſuis numeris ex irrationaliũ reſolutione tàm ſtrictè includere velle, quũ anteceſſores Regiomontanus & alii id ſibi nunquam præſumpſerint ſcientes certitudinem de ultimis illis ſegmentis, unde Circuli menſura in Sectionis pragmateia unicè dependeat, maximè in dubium caſuram.

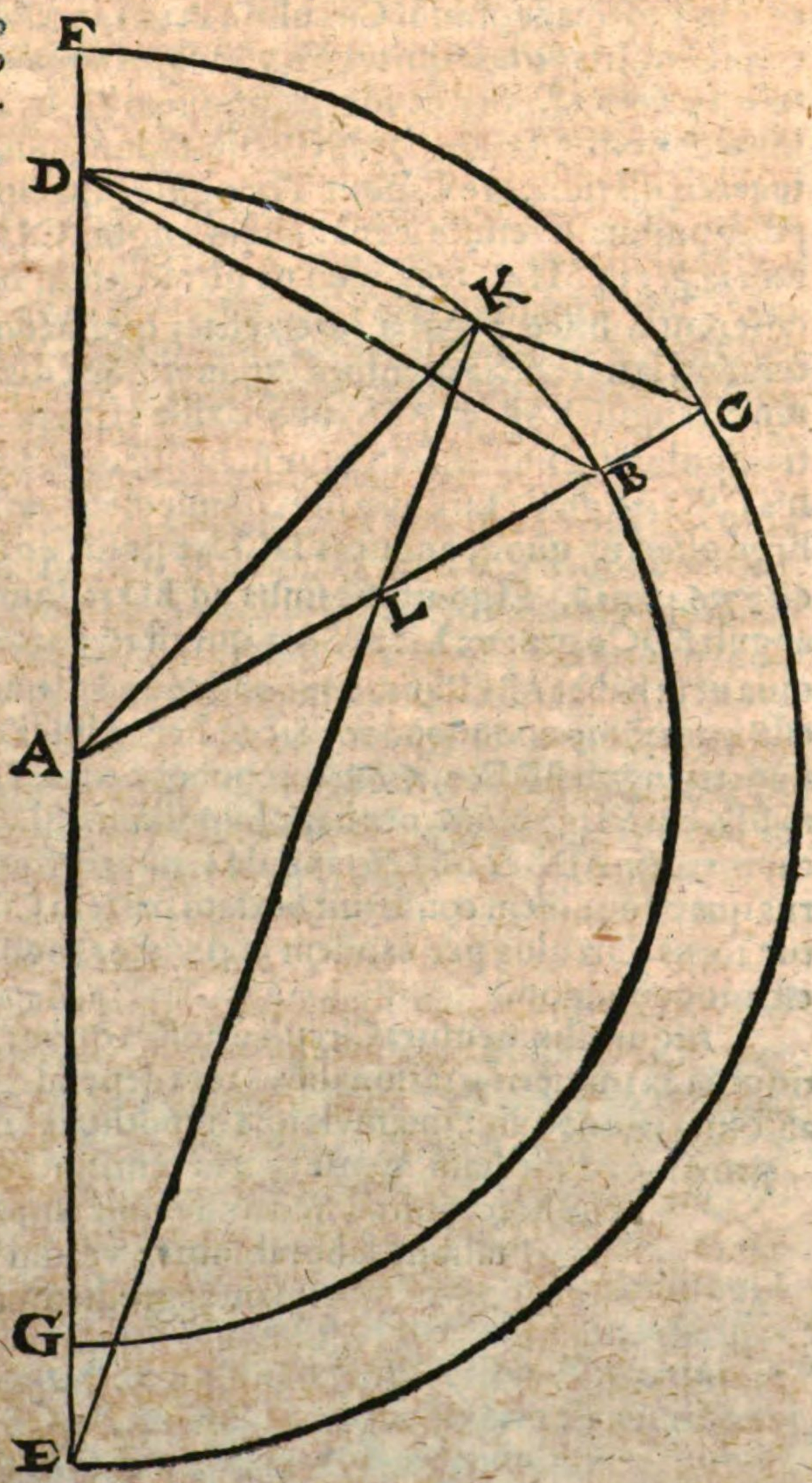
Porrò ut ulterius progrediamur, & facilè *VVeſtphalum*, reliquosq; nimium aberrantes prætereamus, ad Clariſsimum ſenẽ & optimè de Trigonometria meritum Dn: *Philippum Lansbergium*, Middelburgenſem tranſibimus, qui Cyclometriam conſcripſit, in qua, fundamento Ludolphi plurimum inſiſtens, ſperabat ſe ad *Dinoſtrati* τετραγωνίζουσαν numeris pervenire velle: Sed dum hypotheſin à ſe fabricatam premit, id abſurdi admittere cogitur, ut parvum Circulum alium ad magnum menſurandum requiri fateatur. Tandem verò in numeros Ludolpheos, ut dixi, deficiens, ad Cyclometriam ulterius, quam Clavius, promovendam nihil attulit. Sic doctus ille Lansbergius

Siſypheum volvit ſaxum, nec proficit hilum.

Reſtat

Reſtat nobis præſtantiſsimus hodiè apud Belgas Mathematicus *VVillebrordus Snellius Rudolphi* filius, qui non ita pridem apparatum Cyclometricum in lucem edens, fundamentum ejus in *Ludolphi* veſtigiis poſuit, eaq; calculo reiterando preſsit: Sed & uſus Cyclometriæ eximios adjecit, adeò quidem, ut ipſi veriſsima Circuli menſuratio optanda fuiſſet. Hujus excellentiſsimi viri induſtriâ fit, quod ego quidem veræ Cyclometriæ in ſeqq: (quod omnes veritatis amantes cognoſcent) repertæ, uſum per pauciora *Problemata* attexam; Datâ namq; verâ ratione peripheriæ ad Diametrum Circuli, hunc *Snellii Cyclometricus* in pluribus inſigniter multiplicabit.

Atque hi fuêre præcipui, quos novi, quibus æmulatio Cyclometriæ accurationi fuerat. Ceteros volens prætereo, quum ipſorum ſuppoſitiones aut numeris longè à vero diſtent, aut eosdem fugientes, ne arguantur, ſolis lineis contineantur; Interim autem neq; ego reliquis aſymbolus eſſe poſſum, qui ſatis juſto tempore dum genuina Cyclometriæ veſtigia curiosè ac laboriosè premo, plurimas hujusmodi hypotheſes invenerim, inter quas quæ meditationibus meis ſe paſsim obtulerunt unam adjiciam, quæ talis eſt.



Hypotheſis authoris olim excogitata, ſed nunc ante tiquam.

Centro A ſuper Diametro DG, deſcribatur Semicirculus DBG, & hujus tertia parte factâ DB, producatur radius AB in C; rurſus AG in E, ita ut BC & GE fiant æquales. Deinde ducta ſubtenſa BD, & acta CD, quæ ſecabit peripheriam DB in K, ad quod punctum K quando ducantur, EK & AK, ſi tunc anguli AEK & BAK inter ſe fuerint æquales, ita cenſebitur peripheria DB in K Secta, ut triangulum BDC, æquale ſit ſectioni hexagoni BD, & ideo trilineum BKC ſectioni Circuli KD æquale.

Ab hanc hypotheſin demonſtrandam etſi nihil aliud afferamus, quam quod numeri infra in ipſius analyſi arguant: Vero ſimile tamen eſt, myſterium aliquod ad quadrandum Circulum in tali angulorum ſectione latitare, de quo etiam illuſtris *Vieta* loquitur his verbis: *Myſterium angularium ſectionum à nemine hactenus cognitum eſt.* Sed ut ad reſolutionem hujus hypotheſeos in numeros veniamus, & Epilogiſmum eorum ſaltim adponamus, ſciendum eſt, nos per diligentem calculationem è Canone Triangulorum Operis Palatini, primò ex aliquot poſitionibus inveniſſe æqualitatem anguli CAK cum angulo AEK ad menſuram 18 gr: 38 M: $4\frac{2}{7}$ ſec: adeò ut ultra citraq; hanc menſuram nulla ſenſibilis differentia hiſce angulis intercedat, quemadmodum calculum de novo pertentanti ſatis ſe dicta menſura exponet. Sed quia angulus BDC ſemper dimidium eſt anguli KAB ſeu AEK, idcirco ille erit 9 gr: 19 M: $2\frac{1}{7}$ Sec: Proinde quia in triangulo rectilineo BDC datur BD æqualis radio AB 10000000000; Item angulus DBC 120 grad: Eſt enim ille complementum anguli DBA ad Semicirculum; Ergo offertur quoq; angulus DCB 50 grad: 40 M: $57\frac{3}{7}$ Sec: cujus ſinus rectus eſt 7736489328. Ergo ut hic ſinus ad BD radium 10000000000, ſic ſinus rectus anguli BDC 9 gra: 19. M: $2\frac{1}{7}$ Sec: qui eſt 1619020416, ad BC 2092706843. Porrò quia ut ſe habet AB radius 10000000000 ad planum trianguli ADB quod conſtat eſſe 4330127019 0000000000: Sic ſe habet linea BC inventa 2092706843 ad planum trianguli BDC, 9061686440000000000. Proinde tanta eſt Sectio hexagoni BD, cui triangulum, per hanc hypotheſin BDC erit æquale. Complicata igitur invicem ADB & BDC triangula erunt 5236295663 0000000000: Qui numerus quandoquidem conſtituit Sextam partem Circuli ex tali hypotheſi, erit igitur totus Circulus per eandem 31417773978 0000000000, qualium Diameter eſt 20000000000.

In Iſagog: Analytic: cap. 8.

Atqui talis menſura Circuli è noſtra quoq; hypotheſi fuerat, cujus reſolutio quia ex numeris irrationalibus tota dependet; igitur hæc omnibus numeris abſoluta eſſe nequit: quamvis ipſa hypotheſis veritatem in ſe includeret, quia proximè ad mediam menſuram inventionis Archimedeæ accedit, & ideo benè Mechanica. Sed nunc non amplius in hypotheſibus talibus laborabimus; verum potius rem ipſam aggrediemur.

CAP.

CAP. IV.

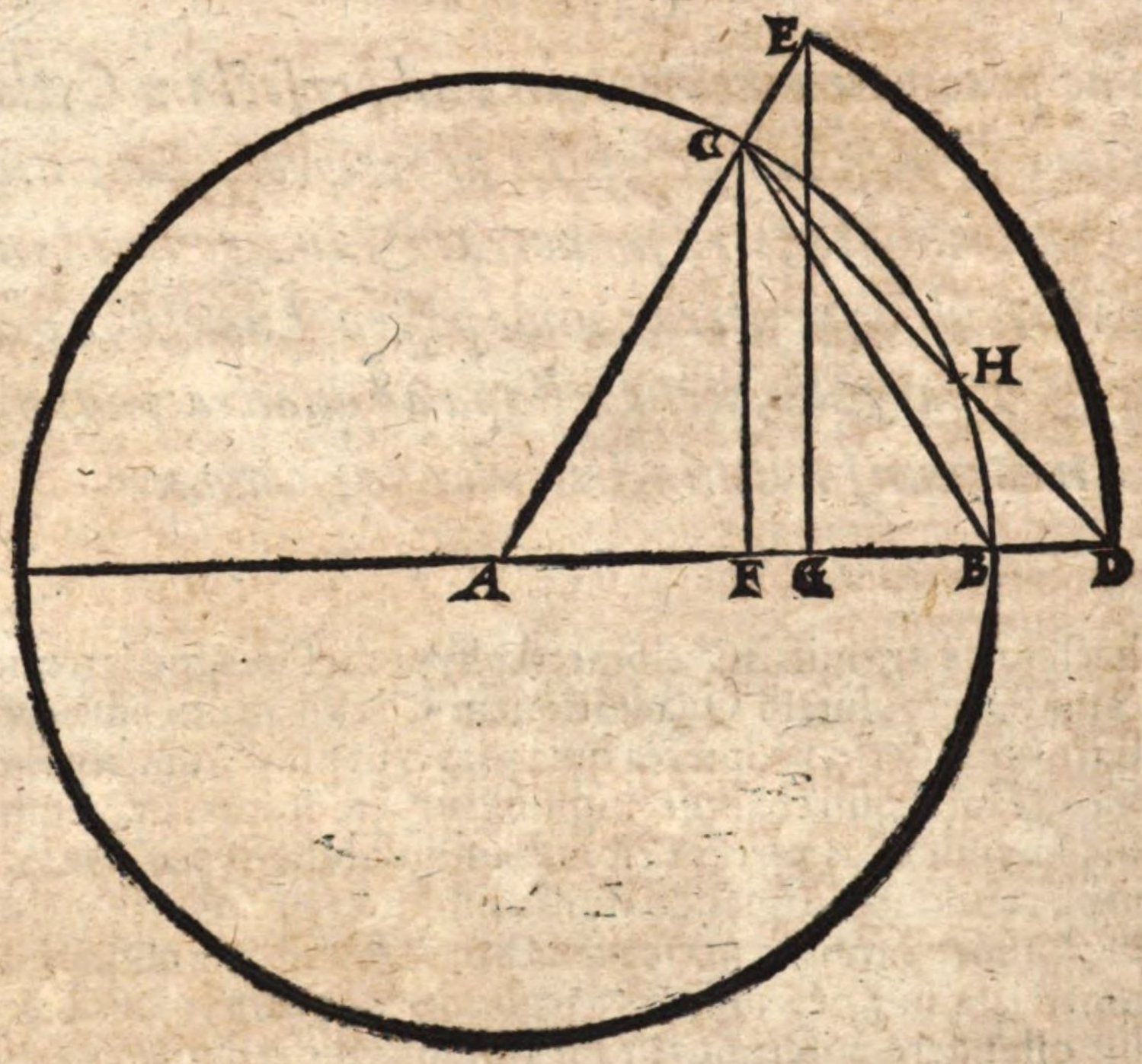
Primum ac præcipuum momentum, ad perfectam Cyclometriam unquam ostendendam, consistit in reciproca inventione Sectionis Circuli ordinatæ toti Symmetræ: & lineæ cujusdam rectæ peripheriæ Circuli Symmetræ: unde posteà Lunulæ, Sexangulæ nempe & triangulæ, item reliqua ad quadrationis pragmateiam facientia, Circulo quoq; commensurabilia ostenduntur.

QUum hactenus è præmissis Cyclometriæ hypothesibus, qualescunq; fuêre, perfectam seu absolutam Quadrationem Circuli nemo educere, aut demonstrare sustinuerit, propterea quia praxes ut plurimum asymmetriâ linearum, quæ ad eam requirebantur, inquinatæ fuerant, quas ut & numeros irrationales his imponendos certum est nullam absolutam ἐπιστήμην extra sese in mente humana relinquere, quando nulli absolutæ seu famosæ mensuræ sint accommodæ: Quocirca nos ad perfectam Circuli mensuram adspirantes, si optatam symmetriam in lineis, spaciis, ac numeris eorum, quæ ad eam requiruntur, prius ostendere poterimus, tum primùm spem de proposito nostro concipiemus solidiorem. Neq; enim de dicta Symmetria nobis desperandum; quippe quæ à nemine hactenus, quod sciam, tentata fuerat, ad eum modum, ut ἀποδεικτικὸν quid inde conficeretur. Nam Scaligeri spacia intra sectorem hexagoni adæquata, ut & complementum Securiclæ cum reliquis trianguli æquilateri inscripti partibus adhuc majorem ac solidiorem demonstrationem requirunt. Nos autem parergis omissis necessitatem in una propositione ostendemus, ejus scilicet rei, quæ ad perfectam *Quadrationem*, nominatam symmetriam requirit.

Propositio I.

Data præter radium Sectione cujusq; finiti arcus Circuli, nec non sinu recto ejusdem arcus, datur triangulum Sectori Circuli ab eodem arcu æquale, & præterea linea recta peripheriæ per assumtum arcum æqualis; & versa vice: Datâ lineâ rectâ peripheriæ in mensura assumti arcus æquali, datur Sector.

Centro A describatur Circulus BC, & assumta qualicunq; ejus circumferentia, ut hêic BC, ducatur subtensa BC. Deindè protrahatur Semidiameter AB versus D, a quo ita linea recta in C agatur, ut triangulum rectilineum constitutum à linea BC, item BD & CD, hoc est, triangulum BCD, æquale fiat Sectioni CB ex hypothesi; erit enim tunc triangulum CAD Sectori BAC æquale: & trilineum BHD æquale relictæ Sectioni HC, subducta scilicet ab æqualibus communi magnitudine BCH; quod primo loco erat ostendendum. *Axiom. 2. lib. 1.*



Porrò AD radio, cui æquale ſit AE, deſcribatur arcus DE à centro A ſub eodem angulo cum arcu BC. Demiſsis prætereà perpendicularibus CF & EG, quarum CF ſinus rectus eſt arcus aſſumpti BC, dico, quod ſtante hypotheſi, Linea EG præcisè æqualis ſit circumferentiæ BC interiori adſumptæ. Etenim quia eſt ut radius AC ad perpendicularem CF; Sic AE ſeu AD ad EG; Et quia rectangulum à terminis mediis nempe CF & AD, æquale eſt rectangulo à terminis extremis, utputa, AC & EG: Utrumq; vero rectangulum eſt trianguli ACD, vel eidem æqualis nempè Sectoris BAC, ex hypotheſi; Ulterius quia ex Archimede conſtat, quod radius AC multiplicatus in peripheriam BC, facit rectangulum duplum Sectoris CAB: Quin & idem radius AC, quoniam cum perpendiculari EG etiam facit rectangulum duplum Sectoris CAB, ut antea ex hypotheſi oſtendimus: Efficitur ergo, quod lineæ binæ hêic, nempe curva BC & recta GE, cum eadem AC rectangulum indifferenter facientes, rectangulo à lateribus CF & AD æquale, inter ſe etiam ſint æquales; Quod ſecundo loco demonſtrandum erat.

Prop. 2. l. 6. *Prop. 19. l. 7* *Item pr. 16. lib 6.* *Prop. 41. l. 1.* *Prop. 1. de Circ: & ejus conſtet:*

Converſio perceptu facilima eſt ex allata modò proportione quatuor terminorum; quia enim eſt ut CF ad EG; Sic AC ad AE ſeu AD; datur AD, & ideò totum triangulum CAD, cui æqualis eſt Sector CAB, quod ultimò fuit oſtendendum.

Corollaria.

Prop. 2. l. 6. 1. Si ſinus rectus CF, aſſumpto arcui BC, vel EG Symmeter fuerit, etiam Trian-

Triangulum internum ACB Sectori seu Triangulo externo ACD symmetrum erit. Sin vero CF linea, lineæ EG asymmetra fuerit, triangulum ACB triangulo ACD asymmetrum erit, & per consequens idem utrobiq; de triangulo ACB cum Sectione BC, seu triangulo rectilineo BCD pronunciandum: Hoc interim observato, quod Sector CAB non transeat Diametrum IB, sed intra Semicirculum maneat cum suo complemento IAC. & Prop. 10. l. 10.

2. Oportet arcum BC in hac pragmateia adsumi toti peripheriæ Circuli commensurabilem: Secus enim nulla ἔπισήμη gignitur. Quoniam autem modò Sector CAB hexagonum Circuli fuerit, quia tunc & latus subtendens arcui assumpto BC idem est cum radio AB, hoc est, cum eo quod *Archimedes* inter bina, aream Circuli constituentia, demonstravit; rectê igitur pro linea aliqua recta peripheriæ Circuli Symmetra penes trigonum æquilaterum inscriptum in seqq: laborandum existimabimus; ut simul figura inscripta Circulo Symmetra esse queat.

CAP. V.

Linea quædam recta Circulo subtensa, nempe latus trianguli æquilateri eidem Circulo inscripti peripheriæ ejusdem Circuli longitudine commensurabilis potissimum ostenditur. Item Diametro perimeter ejusdem Circuli incommensurabilis.

THeoremati huic, quod maximè ad *tetragonismum* absolutè & scientificè in medium producendum, est necessarium, quatuor lemmata præmittuntur, quorum primum ita habet.

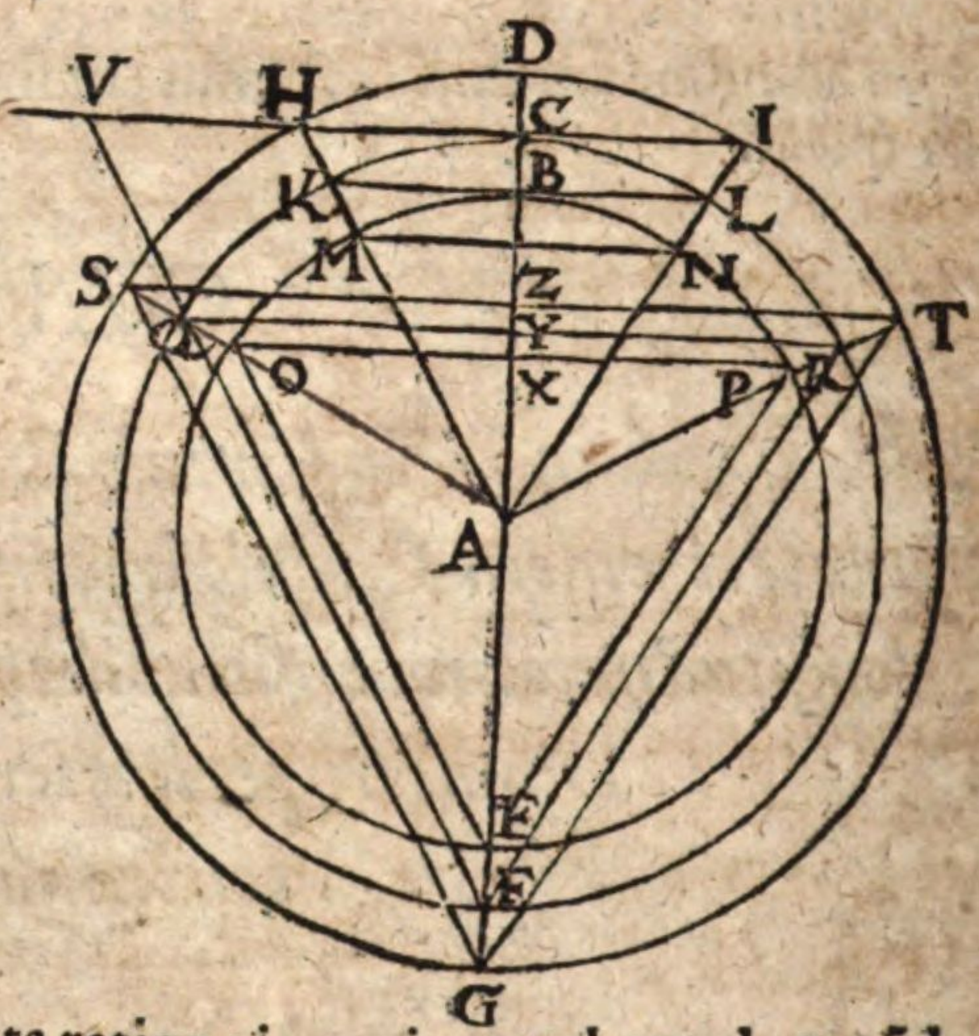
LEMMA I.

Si tres Circuli ex uno centro à quo angulus Sexanguli ordinati, Circulo inscripti mensuratur, ita ordine describantur, ut subtensam hexagoni Circuli extremi proximè sequens tangat, hujus vero subtensam similiter infimus; erunt hi Circuli in continua ad invicem ratione, & quidem sesquitertia:

Porrò latus trianguli æquilateri Circuli horum extimi, æquale erit Diametro Circuli medii; Latus verò similis trianguli medio Circulo inscripti æquale Diametro Circuli infimi; & demum latus trianguli æquilateri huic infimo Circulo inscripti $\frac{3}{4}$ partes continebit Diametri Circuli medii. Præter hæc autem si agatur linea ab extremitate Diametri Circuli medii horum, continuata scilicet per latus ipsius inscripti trianguli æquilateri, donec ei occurrat linea educta à subtensa hexagoni Circuli extimi, erit hujusmodi linea æqualis Diametro Circuli extimi, & linea huic occurrens, mediumq; Circulum tangens ipsius dimidia.

Super

Super A centro distantia AD describatur extimus Circulus DG. Deinde beneficio radii ducatur æqualis subtensa HI, & inscribatur à centro triangulũ æquilaterum HAI, quod ob id erit sexta pars hexagoni ordinati inscripti: Deinde inscribatur Circulus medius CF. & tandem subducta KL inscribatur infimus trium Circulorum EB è communi centro A. Dico primùm hosce Circulos ordine positos in continua ac commensurabili ratione esse inter sese, nempe sesquitertia. Posito enim radio AC Circuli medii 1 part: erit BK hujus dimidium $\surd\frac{1}{4}$: Quo subducto ab AC, vel AK $\surd 1$ relinquitur BA $\surd\frac{3}{4}$. Jam ut AB ad AK, sic rursus AK seu AC ad AH. Igitur AC radius Circuli medii mediam proportionem obtinet inter extremorum radios nempè AD & AB; & præterea in hac proportione evadit radius Circuli extimi AD $\surd 1\frac{1}{3}$.



Hisce sic ostensis, quoniam AB & AD inter se sunt, ut $\surd\frac{3}{4}$ & $\surd\frac{4}{3}$, sunt igitur hæ lineæ inter se commensurabiles, & eandem rationem inter se habent, quam $\surd 9$ & $\surd 16$, id est quam 3 & 4, quod apparet divisis $\surd\frac{4}{3}$ in $\surd\frac{3}{4}$. Et propterea differentia inter AD & AB, quæ est BD, quater exactè continetur in AD radio Circuli extimi, & ter in radio AB Circuli trium infimi. Quod idem quoq; de integris Diametris horũ extremorũ Circulorum censendum, adeò ut differentia inter GD & EB sit DZ, quæ quarta pars est de GD. Hisce fundamenti loco substratis, quoniam figuræ similes quales Circuli imprimis sunt, in duplicata ratione inveniuntur homologorũ la-

Prop. 2. li. 2. terum; Vel quod specialius est: Circuli sunt in duplicata ratione suarum Diametrorum; erunt Circuli DG & CF in eadem planè ratione, qua Diametri DG & BE, hoc est, sesquitertia, seu ut 4 ad 3. Idem de Circulis BF & BC dicendum, quæ primo loco erant ostendenda.

Secundò singulis hisce Circulis triangula æquilatera inscribantur, sitq; extremo triangulum æquilaterum inscriptum GST, medio FQR, & tandem infimo EOP: Dico latus ST æquale esse diametro CF, itam QR æquale EB. Deniq; OP æquale $\frac{3}{4}$ Diametri CF. Quoniam enim demissa perpendicularis ab S tertia parte Semiperipheriæ DS in radium AD, eundem bifariam dividit in Z, & AS data est $\surd\frac{4}{3}$: Quare hujus dimidium AZ, quod est $\surd\frac{1}{3}$ ab eadem AS sublatum, relinquit $\surd\frac{3}{3}$ seu 1 pro SZ, quæ est æqualis radio AC, & ideo subdupla Diametri Circuli medii CF. Eadem planè pro reliquis demonstratio est. Quod verò OP æqualis sit FY nempe $\frac{3}{4}$ Diametri FC, facilè ex antecedentibus colligitur, siquidem OP $\frac{3}{4}$ est de ST, ut FB $\frac{3}{4}$ de DG. Sunt enim homologa latera figurarum similium in simili ratione. Et quia ST prius ostensa est æqualis CF, ideoq; eadem OP æqualis est FY, quæ itidem $\frac{3}{4}$ est de FC: Quæ secundo loco demonstranda fuêre.

Tertio eductâ FQ infinitè, donec ea occurrat lineæ CH similiter eductæ in V: Dico

V. Dico quod FV æqualis ſit GD & CV æqualis ipſius dimidio AD; Quoniam enim parallelæ ſunt AH & FV, triangula CAH & CFV ſunt æquiangula, & ideò latera circa eosdem angulos habent proportionalia. Proindè quoniam Diameter CF dupla eſt Semidiametri AC erit quoq; CV, dupla CH, & FV dupla CV. Et quia HV & CI ſunt æquales, erit igitur CV æqualis AD: & FV æqualis GD. Idem in numeris breviſsimè. Quoniam ut ſe habet AC 1. ad CH $\surd\frac{1}{3}$ ſic duplum ejus FC 2, ad duplũ hujus nempè CV $\surd\frac{4}{3}$ ut prius. Ceterum additis CV $\frac{4}{3}$ & CF 2, fiunt pro FV $\surd 5\frac{1}{3}$ & tantundem eſt DG: Quod ultimo loco erat convincendum.

LEMMA II.

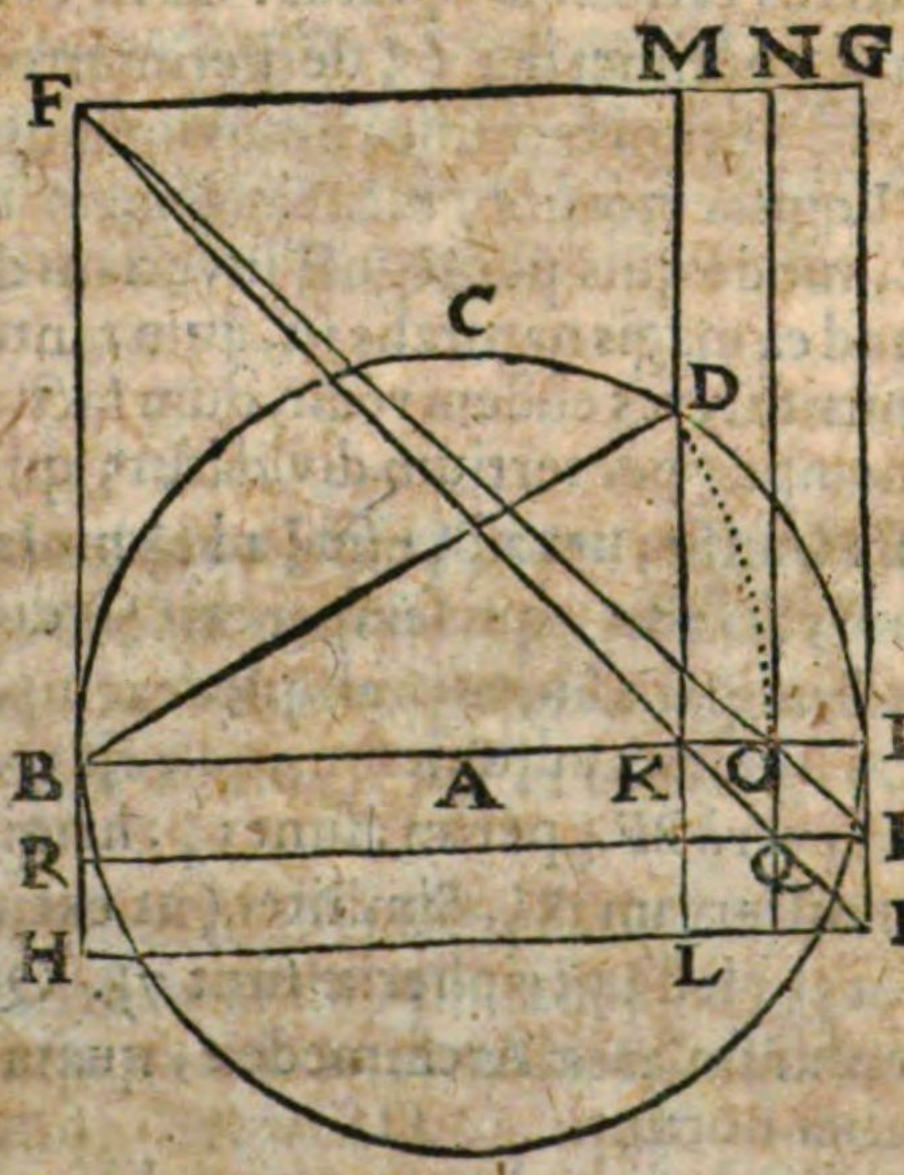
Data ratione lineæ rectæ ad Diametrum Circuli quæ vicem unius laterum duorum obit rectangulum conſtituentium aream Circuli ejusdem æquale, datur ratio alterius lateris in linea recta ad perimetrum totam; & verſa vice: ubi etiam oſtenditur $\surd 1\frac{1}{2}$ *peripheriæ Circuli medii eſſe* $\frac{1}{4}$ *peripheriæ Circuli extimi trium præcedentium.*

Hoc Lemma ſuper prima propoſitione Archimedis fundatum eſt, & ejus velut conſectarium. Ratio autem talis, quæ unam hujusmodi rectarum in ſe continebit, dum altera certò concedatur, non niſi ex hypotheſi cum Archimede deſumitur. Utraq; verò ſimul conſideranda eſt, velut ἕητὰ, hoc eſt; quæ numeris explicabilibus proponitur; vel ut ἄῤῥητα, id eſt, in numeris ſurdis. *Prop. 1. de Circ:*

Utriusq; exempla ad hoc Lemma declarandum, ſubjungemus, & ulterius in ſeqq: perſequemur.

Lemmatis fabrica hæc eſt:

Centro A deſcribatur Circulus BCDE, & ſumatur Diameter integra BE pro uno laterum rectangulum conſtituentium areæ propoſiti Circuli æquale. Erit igitur linea recta quadrantis peripheriæ BC æqualis alterum latus. Sit illud ex hypotheſi, & qualiter ἐφαρμόσει mechanicâ haberi poteſt, linea recta BF. Factum igitur rectangulum BFGE æquale eſt areæ Circuli propoſiti (qui quidem Circulus ſit heic medius inter tres ſuperiore Lemmate hexagono ordine adſcriptos) quatenus, ſcilicet, ex hypotheſi BF linea recta æqualis eſt peripheriæ BC. Quibus ſic conſtitutis, Dico; Si detur linea recta in certa ratione, vel cum Circuli hujus Diametro, vel perimetro tota, dari etiam confeſtim, quæ in altera ratione, alterum latus ſubminiſtrabit rectanguli areæ Circuli æqualis.



Per conſect: pr. 1. Archimed: de Circ:

Lemmatis hujus demonſtratio in exemplis patet. Nimirum ſumatur in

Diametro BE pro primo exemplo, BK $\frac{3}{4}$, de BE; & quæratur portio in Perimetro quæ alterum latus dabit rectanguli areæ Circuli, non minus æqualis, quàm rectangulum BG.

Productâ igitur GE infinitè, deindè ductâ diagonio ab F per K, donec perveniat ad lineam GE infinite eductam in I. Hinc factâ parallelâ HI cum Diametro Circuli BE, & ductâ per K lineâ ML parallelâ GI. Dico, quod HM rectangulum etiam areæ Circuli propositi sit æquale. Sunt enim in toto rectangulo HG complementa BL, & KG æqualia; quare sublato KG de rectangulo BG, & æquali adjecto BM nempè HK, erit rectangulum HM rectangulo BG ab initio æquale, & utrumq; areæ Circuli propositi, hoc est, medii trium superiorum ex ea hypothesi æquale, quâ scilicet BF, quadrantis peripheriæ BC fuerit æqualis. Est propterea ML portio definita perimetri ejusdem Circuli, quæ quanta sit hâc viâ cognoscitur. Quum enim fuerit ut BK ad BE, sic MK ad GI, seu ML. Igitur quoniam BE superat BK $\frac{1}{4}$ totius BE, superabit etiam GI seu ML peripheriam quadrantis MK $\frac{1}{4}$ parte ipsius GI seu ML vel $\frac{1}{5}$ peripheriæ quadrantis GE. Nam quemadmodum BK est $\frac{3}{4}$ de BE: sic MK erit $\frac{3}{4}$ de integro ML. Et quia $\frac{3}{4}$ se habent ad 1, ut $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{5}$ est igitur ML $\frac{1}{5}$ peripheriæ Circuli propositi & æqualis peripheriæ BD ex hypothesi. Quoniam autem è proportione quatuor terminorum rectangulum è duobus mediis terminis æquale est ei, quod à duobus extremis; & medii semper sunt BE diameter, & CE peripheria quadrantis: Erunt igitur extremi duo illi termini, quorum unius ratio semper datur in ratione cum uno mediorum, ut alterius seu quarti hinc quæratur. Unde talis dispositio terminorum semper in regula proport: hêic erit: Primo loco ponatur portio illa diametri vel perimetri imperata, cui congruens in altera elicienda est: Secundo loco 1. pro integra diametro: Tertio loco $\frac{1}{4}$ pro peripheria Quadrantis; Atq; hinc emergit quartus terminus optatus: Ut in eodem præmisso exemplo: $\frac{3}{4}$ Diam: dant 1: quid $\frac{1}{4}$ perimetri; ($\frac{1}{5}$ de perimetro. Et versa vice.

Prop: 16. l. 6. Et 19. l. 7.

Verum terminos binos medios positione variare, quia haud necessum esse Logistæ norunt, maneant igitur illi perpetuò, etiam ut in primo exemplo. Et, modò quis per regulã inversam dispositionem terminorum instruere velit, quod ea magis naturalis sit, dum tantum acquiritur unâ parte, quantum alterâ amittitur, res eòdem redit, dum factus è duobus prioribus terminis scilicet 1 & $\frac{1}{4}$ nempe $\frac{1}{4}$ per tertium dividatur; qui ex primo superioris in hunc tertium locum transit; ut 1 ad $\frac{1}{4}$: sic $\frac{3}{4}$ ad ($\frac{1}{5}$ multiplicato scilicet primo termino in secundum, & facto (qui semper erit $\frac{1}{4}$) diviso in terminum tertium. Ut autem veritas Lemmatis hujus in aliquot exemplis ulterius probetur; age *Archimedis* rationem usitatam adsumemus, quæ est $3\frac{1}{7}$, seu ut Diamet: 7 ad perimetrum 22. Quoniam verò BF $\frac{1}{4}$ perim: sunt $5\frac{1}{2}$: hi igitur in BE diametrum 7 multiplicati dant Circuli aream $38\frac{1}{2}$. Similiter (ut exemplum superius hùc afferamus) $\frac{3}{4}$ Diam: sunt $5\frac{1}{4}$: sed $\frac{1}{5}$ peripheriæ sunt $7\frac{1}{7}$. Qui numeri in se ducti etiam efficiunt $38\frac{1}{2}$ mensuram areæ Archimedeæ, quam tamen justò maiorem esse omnes Mathematici norunt.

Aliud exemplum in rationalibus. Detur imperata ratio perimetri $\frac{2}{3}$, & quæratur alterum latus in Diametro. Jam per Regulam: Ut $\frac{2}{3}$ perim: ad 1 Diametrum; sic $\frac{1}{4}$ perim: ad ($\frac{3}{8}$ Diam: Vel hoc modo: ut $1\frac{1}{4}$, sic $\frac{2}{3}$ ($\frac{3}{8}$ Diam: per Regulam in-

lam inversam. Nunc si fiat operatio super iisdem *Archimedis* datis ut prius, erunt $\frac{2}{7}$ de perimetro nempe 22, partes $\frac{44}{7}$: & $\frac{7}{8}$ de Diametro utputa 7, partes sunt, $\frac{21}{8}$: qui numeri in se multiplicati efficiunt $38\frac{1}{2}$ ut prius.

Verùm non solum ad numeros rationales, sed etiam irrationales *Lemmatis* hujus factio se extendit, ut ab initio admonitum est. Ut detur in BE Diametro BO æqualis lateri trigoni æquilateri inscripti BD: Quæ linea BO ob id Diametro BE longitudine irrationalis est, quia latus ipsum trigoni BD, solum potentiâ Diametro BE est rationale; siquidem oritur ex multiplicatione BE in BK, quandoquidem inter hos medium proportionale est. Factâ igitur Diametro BE part: 1, & BK $\frac{3}{4}$ hujus: erit BD, seu BO $\surd\frac{3}{4}$. Jam ut BO $\surd\frac{3}{4}$ Diamet: ad BE. 1; sic NO $\frac{1}{4}$ ad (perim: NQ $\surd\frac{1}{12}$.

Vel per Regulam inversam:

Ut BE 1, ad NO $\frac{1}{4}$; sic BO $\surd\frac{3}{4}$ ad (NQ $\surd\frac{1}{12}$.

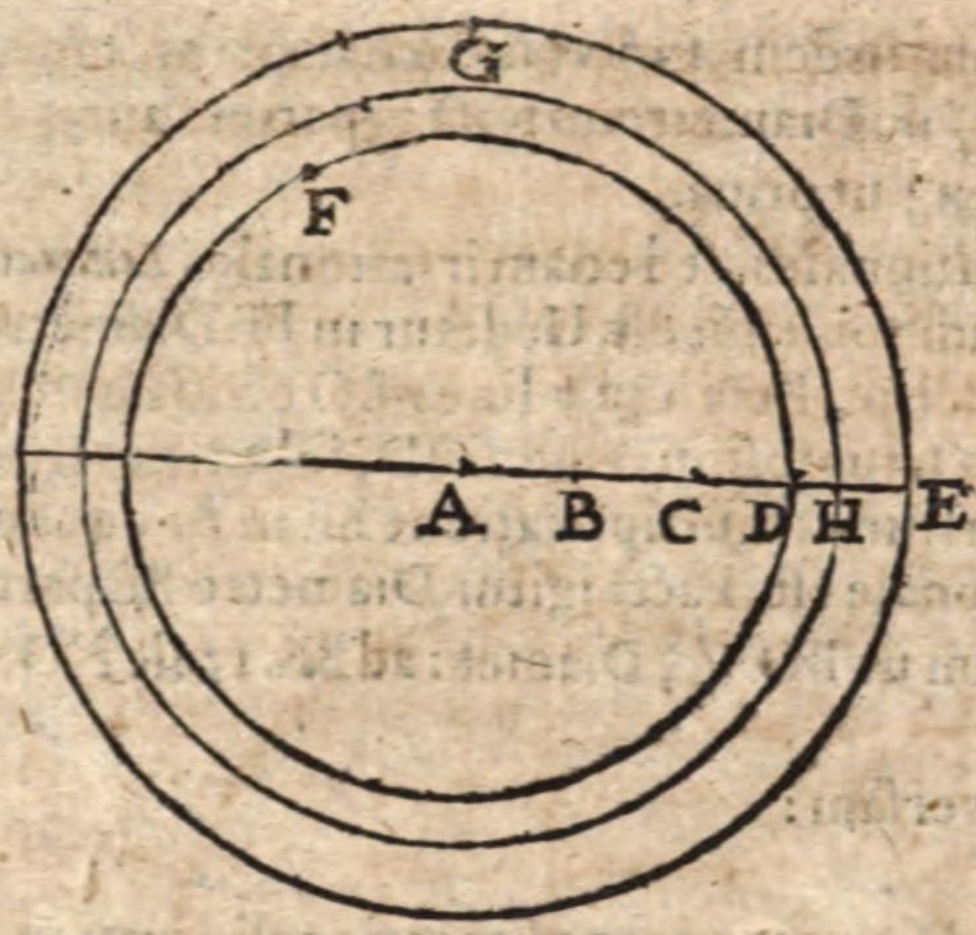
Quum igitur portio imperata in Diametro proposita rationali, irrationalis fuerit, etiam in perimetro concepta rationali, alterum latus irrationale evadit. Interim tamen & per hosce numeros mensuram Archimedeam Circuli restitui posse cernes. Nam primum erit ut Diam: 1 ad 7, sic. $\surd\frac{3}{4}$ ad $\surd 36\frac{3}{4}$ id est BO seu RQ. Deinde $\surd\frac{1}{12}$ de 22, sunt $40\frac{1}{3}$, quod est latus NQ; Denuo multiplicati inter se $\surd 36\frac{3}{4}$ & $\surd 40\frac{1}{3}$ efficiunt $\surd 1481\frac{1}{4}$, cujus radix est $38\frac{1}{2}$ ream Circuli Archimedeam, ut prius, restituens. *Prop. 20. l. 10.*

Ceterum eadem NQ non difficulter hic monstratur esse $\frac{1}{4}$ peripheriæ Circuli extimi in figura Lemmatis superioris. Quum enim BE Diameter Circuli medii ostensa sit esse latus trianguli æquilateri inscripti extimo Circulo; BO verò Diameter Circuli infimi, & hanc distare ab ipsa Diametro Circuli maximi in eadem ratione, quâ BK à BE, hoc est $\frac{1}{4}$ part: Diametri Circuli maximi. Quare ut est BK $\frac{3}{4}$ Diametri BE ad peripheriam MK quadrantis Circuli medii ex hypothesi: sic BO seu RQ ad NQ peripheriam quadrantis Circuli extimi trium in figura Lemmatis superiori. Efficitur ergò $\surd\frac{1}{12}$ peripheriæ Circuli medii & $\frac{1}{4}$ peripheriæ Circuli extimi illorum trium, una eademq; magnitudo; quod etiam infrà aliis demonstrationibus se prodet. *Lem: 1. hujus.*

LEMMA III.

Si duo, tres, aut plures Circuli ex uno Centro describantur, quorum Diametri, radii, vel quævis homologa latera in lineis rectis cognita inter se rationem habent, etiam vera & definita magnitudo unius peripheriæ in peripheriis reliquorum terminari poterit: Quin & quæ media est per extremas rationales mensurari.

Linea recta aliqua, ut AE, pro exemplo hîc, dividatur, primùm in quatuor partes æquales, nempe BCDE, & describantur duo Circuli super radiis AD & AE, è communi centro A. Dico tertiam partem interioris Circuli DF prorsus æqualem esse quartæ parti peripheriæ extimi Circuli E G.



Quoniam enim figuræ ſimiles, quales etiam Circuli ſunt, homologa latera continent eandem rationem inter ſe habentia: Radii verò & peripheriæ diverſorum horum Circulorum etiam ſunt ipſorum latera homologa, dum inter ſe comparantur: Ergo datâ hêic ratione radii AE, ad radium AD ſesquitertiâ ſeu $1\frac{1}{3}$: Reciprocè igitur, dum æquales magnitudines harum peripheriarũ menſurantur, erit $\frac{1}{4}$ peripheriæ Circuli inferioris DF æqualis $\frac{1}{4}$ peripheriæ Circuli ſuperioris E G. Etenim $\frac{1}{3}$ eandem habet proportionem ad $\frac{1}{4}$ quam 4 ad 3. hoc eſt, ſesquitertiam. Hinc facilè diverſorum Circulorum circumferentiæ æquabuntur, quorum Diametri, radii, vel homologæ aliæ ſubtenſæ, in certa ad invicem ratione cognita fuerint.

Porro inventa inter AD & AE media proportionali AH, & ſuper eadem, velut radio, deſcripto Circulo medio, erit idem medius trium ſuperiùs ex angulo communi, hexagono nempe, ordine adſcriptorum; cujus ideo circumferentia eſt media inter circumferentiam infimi Circuli DF, & ſupremi EG, quemadmodum AH radius medius eſt inter radios AD & AE, & quia radius AH conſtat multiplicatione AD 3. p: in AE 4. p: eſt igitur $\sqrt{12}$: Proinde & AD 3, & AE 4 ſingulis in quadratis, ſeu potentia ſua expoſitis, erunt hi Circuli tres propoſiti in menſura ad invicem, ut numeri: 9: 12: 16. Quoniam autem talis ratio duplicata eſt homologorum laterum, erunt horum Circulorum ſive radii, ſive peripheriæ ad invicem, ut $\sqrt{9}$. $\sqrt{12}$. $\sqrt{16}$. Et quia $\sqrt{\frac{1}{9}}$ ſeu $\frac{1}{3}$ Circuli infimi peripheriæ æqualis modò oſtenſa eſt $\sqrt{\frac{1}{16}}$ ſeu $\frac{1}{4}$ Circuli extimi; Dico $\sqrt{\frac{1}{12}}$ peripheriæ Circuli medii reliquis DF & EG eſſe æqualem; Etenim eſt ut AE 4 ad AH $\sqrt{12}$; Sic rurſus $\sqrt{\frac{1}{12}}$ ad $\frac{1}{4}$ ſeu FG. Atqui ſic iterum oſtenſa eſt $\sqrt{\frac{2}{12}}$ peripheriæ Circuli hujus medii, quæ in propria peripheria exactè determinari nequit (: quia talis numerus irrationalis eſt, poſita peripheria rationali:) præciſè converti cum magnitudine $\frac{1}{4}$ in peripheria Circuli propoſitorum extimi, & $\frac{1}{3}$ peripheriæ Circuli infimi: quod & hêic demonſtrandum propoſuimus.

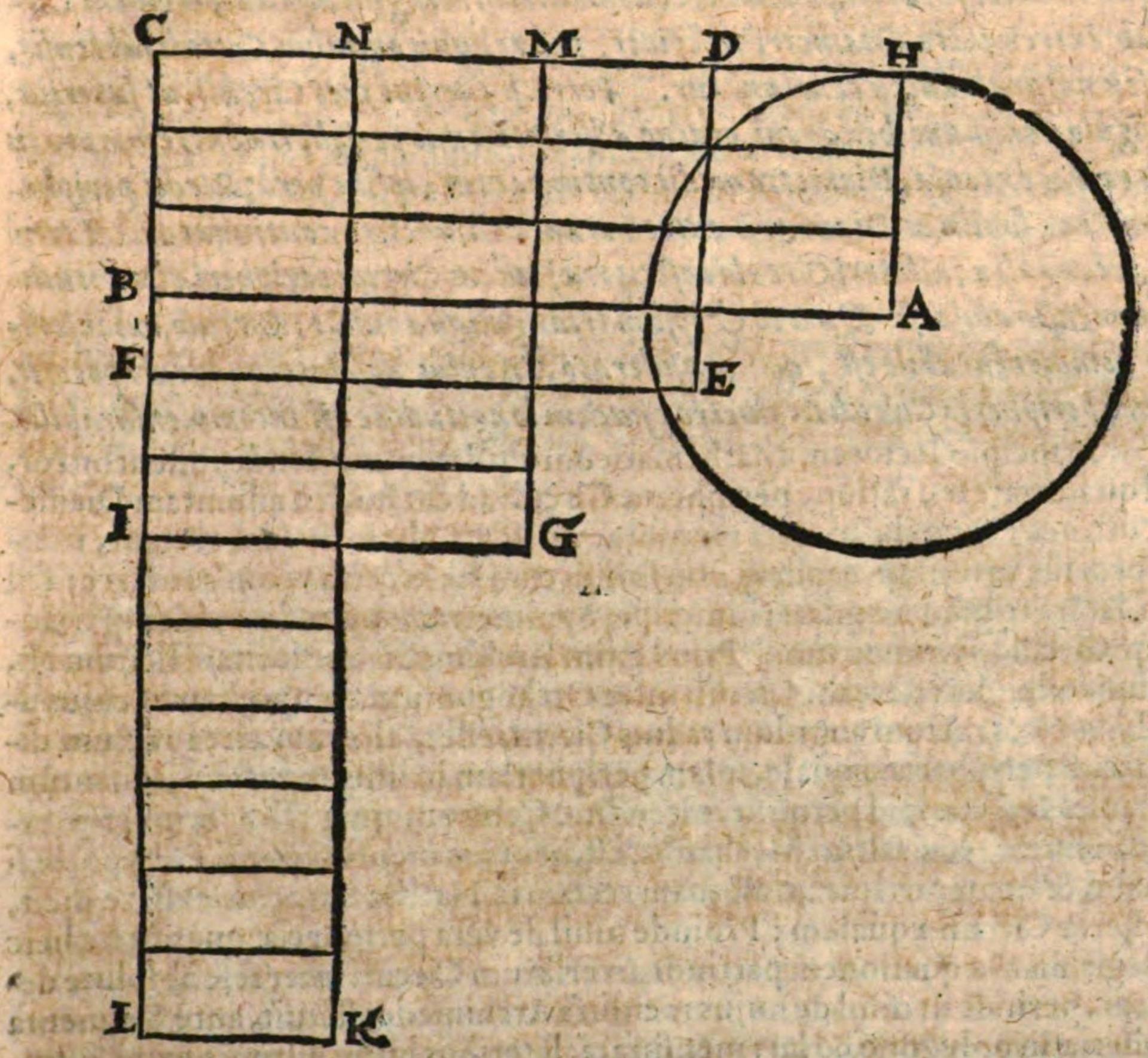
vide in fine Lem: præced: proximè.

LEMMA IV.

Rectangulum Circulo æquale conſtans lateribus rationali & irrationali ſaltim longitudine, ſi etiam dividatur per latus irrationale velut baſin in partes æquales, & latus rationale quoq; rationaliter Varietur; Rectangulum dictum, in eadem quantitate manens, varias ſui formas ſub quavis mutatione induere poteſt, laterum qualitate haud mutatâ; dum ſegmenta homogenea requiſita, unis laterum addantur, & alteri detrahantur.

Sit perimeter ad Diametrum ejusdem Circuli (ut reverâ eſt) longitudine irrationalis, ſeu incommenſurabilis, & exponatur radius ſeu Semidiameter Circuli medii trium ſuperiorum AH in linea rationali, dividaturq; in tres partes

tes æquales, & item AB seu HC linea recta æqualis, ex hypothesi, Semiperiphe-
riæ ejusdem Circuli: Ex quibus duabus lineis rectangulum construatur areæ
Circuli propositi æquale: Sitq; hujusmodi linea AB expositæ rationali AH in- *Ex consect:*
commensurabilis longitudine, & quia potentiâ Circuli medii superius respecti- *prop: 1. Ar-*
vè erat 12 part: dividatur igitur AB in 4 partes æquales, undè ipsum rectangu- *chim: de*
lum ABCH, quod Circulo adjecto ex hypothesi, ut dixi æquale est, in 12 quoq; *Circ:*
spacia seu rectangula divisum exstat.



His ita constructis, dico ipsum rectangulum ABCH varias formas indue-
re posse, manente eadem quantitate, ac laterum qualitate. Primò enim quan-
doquidem HC, velut basis lateris irrationalis divisa est in 4 partes æquales, ut-
puta DMNC; Demittatur igitur primò DE parallela HA & CB, deinde auge-
tur BC una sui parte nempè BF, & agatur FE parallela & æqualis CD, evadit igi-
tur ex lateribus CD & CF rectangulum æquale ab initio posito nempè BH, late-
rum qualitate non mutatâ; Est enim CD Symmetrum CH, & CF Symmetrum
BC. Porro non est alia ratio in rectangulo I M, Item rectangulo L N, quæ & ipsa
primario BH singula æqualia sunt, qualitate laterum singulorum seu Symme-
triâ, ut ab initio, servatâ; quod hêic oculari quasi ostensione patescit.

Atqui hinc facilè est collectu, illam rectanguli mutationem, quod sub pa- *Admonitio.*
ri quantitate aream Circuli repræsentabit, naturaliter seu verè non contingere

nisi servata ubiq; laterum, hoc est Diametri cum Diametro, ac perimetri cum perimetro Symmetria, per singula variationis segmenta cujusq;, ne una alteri commisceatur, & sic heterogenea intromittantur.

PROPOSITIO I.

Linea recta pro Circuli Peripheria, aut Semiperipheria, vel quacunq; hujus portione commensurabili, ponenda, eadem lateri trianguli æquilateri eidem Circulo ab extremitate Diametri inscripti, præreliquis omnibus Circuli subtensis, vero seu naturali ductu continuatur. Porro si fuerint tres Circuli, ut superius, ex angulo communi hexagonii ordine adscripti, tunc peripheriæ extremorum in lineas rectas extensæ, Diametro medii continuantur; ipsius verò Medii peripheria in recta, similiter Diametris extremorum conjunctis, continuatur. Tertiò latus, trianguli æquilateri Circulo inscripti, ejusdem Circuli peripheriæ longitudine commensurabile est. Quartò & ipsum triangulum æquilat: Circulo, cui inscribitur commensurabile est, quo considerato, Circulus absolute quadrari poterit. Quintò peripheria Circuli Diametro ejusdem longitudine est incommensurabilis.

Principiò lectorem Mathematicum nullatenus offendi posse arbitror, quod quantitate seu ratione peripheriæ Circuli ad datam, seu assumtam Diametrum in linea rationali, ac certa mensura, vel ullam aliam lineam rectam, nondum prorsus inventam eandem non solum cum linea recta velim conferre; sed etiam lateri trigoni æquilateri inscripti Symmetram ostendere, adeoq; triangulum Circulo symmetrum. Prius enim Archimedis authoritate licitum est, qui, dum ostenderet, aream Circuli intra Orthogonium comprehendi, cujus unum latus circa rectum angulum radius Circuli esset, alterum circa rectum dictæ Circuli peripheriæ æquale, ipsam peripheriam in lineam rectam, quantùm Mechanica ἐφάρμοσις id permisit, extendit. Ceterum quia talis peripheriæ extensio in lineã rectẽ saltim Mechanica est, nec ejus mensuram nisi ex hypothesi concedit, & quatenus lineam aliquam rectam in Natura Eutocius exstare dicit, peripheriæ Circuli æqualem: Proinde nihil de vera peripheriæ quantitate hêic ante legitimam æquationem partium diversarum Circuli inter sese absolutè decernitur, perinde ut nihil de hujus mensura Archimedes statuit, ante Segmenta peripheriæ in polygono 96 lat: mensurata, lateribus hujus ultimis extrà intraque quam proximè assimilanda.

Alterum similiter quod Symmetriam, juxta propositum ostendendam, concernet, quia neq; nunc veram quantitatẽ peripheriæ attingit, sed saltim hæc Geometria *Qualitatis* est, quâ aliæ plurimæ, imò præcipuæ propositiones Elementorum Euclidis absq; *quantitatis* determinatione, quæ potius in specialibus exemplis perspicitur, demonstrationi exponuntur. Sive igitur major, sive minor aliquantò, sive ipsa veræ quantitatis peripheria Circuli sic in linea recta exponitur, illud firmiter & inconcussè stabit, quod præsens vult propositio, ubi semel necessariis illationibus fuerit convictum. Sed ad rem.

Transferatur hùc figura lemmatis 1. præmissorum, & ex eo exponatur Circulus medius notis BCED super centro A; cujus primùm ducatur Diameter BE: Deinde eidem inscribatur triangulum æquilaterum BCM; Tertiò latus ejus unum ut BC producatur in F, ita ut BF recta, æstimatione per ἐφάρμοσιν Mechani-

chanicam, æqualis fiat peripheriæ ſemicirculi BCE. Quartò ſimiliter continuetur Diameter BE in Q, donec linea à Q perpendiculariter cadat in F quæ ſit QF; quin etiam prorogetur linea BF in Z donec perpendicularis à Z ceciderit in Q: item perpendicularis ex F in BQ, quæ ſit FT. Alia verò ex θ in E nempe extremitatē Circuli Diametri, quæ ſit θE. Quoniā igitur BF conceſſa eſt Semiperipheriæ Circuli medii ex hypotheſi æqualis, & angulus ZBQ ſeu CBE datus eſt 30 grad: qualium duo recti ſunt 360 grad: ſeu menſura totius Circuli. Præterea à menſura BC Diametri inſcripti Circuli infimi, ad menſuram Bθ Diam: Circuli extimi ex ſuperiori Lem: oſtenſa eſt in ea ratione quæ eſt num: 3 ad num. 4. Porrò quia BE Diameter Circuli medii eadem demonſtrata fuit cum latere trianguli æquilateri extimo Circulo inſcripti: Quia igitur eſt ut BC ad BE, ſic BF ad BQ, & homologa latera figurarum ſimilium eandem inter ſe rationem habent; Proinde efficitur BQ Semiperimeter Circuli extimi in linea recta ex eadem hypotheſi, quâ BF Semiperimeter Circuli medii. Eodem modo quia BS æqualis reperitur cum latere trianguli æquilat: infimo Circulo inſcripti, & eſt ut BE ad FQ: ſic BS ad BT, quare erit BT ſimiliter linea recta Semiperimetro infimi trium Circulorum ex hypotheſi æqualis, & quia BS diſtat à BE per ¼ ipſius BE, diſtabit igitur BT ſemiperimeter Circuli infimi à BQ ſemiperimetro extimi, per ¼ BQ. Et ob id eſt BQ ¾ Circuli infimi peripheria. Porrò quia eſt ut BT ad BF, ſic BQ ad BZ, efficitur BZ ¾ peripheria Circuli medii. Et propter menſuram anguli CBQ 30 grad: erunt omnes lineæ perpendiculares à BZ in BQ exactè partes dimidiatæ à ſuis punctis in BZ, ipſorum punctorum ad B usq;, ut ZQ dimidia eſt ZB: & ideo ⅓ peripheriæ Circuli medii. Item FT dimidia de FB, & ideò ¼ peripheriæ Circuli ejusdē &c. Similiter planè perpendiculares cadentes à linea BQ Semiperipheriā Circuli extimi referente, in Semiperipheriā Circuli medii BF, quia omnes ſunt ſemiſſes eorum, quæ a B in eadem puncta determinantur, unde perpendiculares iſtæ cadunt: Erit igitur FQ ¼ peripheriæ Circuli extimi trium horum, & TE ¼ peripheriæ Circuli infimi eorundem. Quia verò in ceteris eodem modo contingit, erit EC dimidium Diametri BE, & CS dimidium lateris inſcripti trianguli BC quod etiam radius eſt Circuli infimi, ut & θE radius extimi, vel eidem planè æqualis.

Lem: 1. hujus.

Lem: 1. hujus.

Lem: 2. hujus.

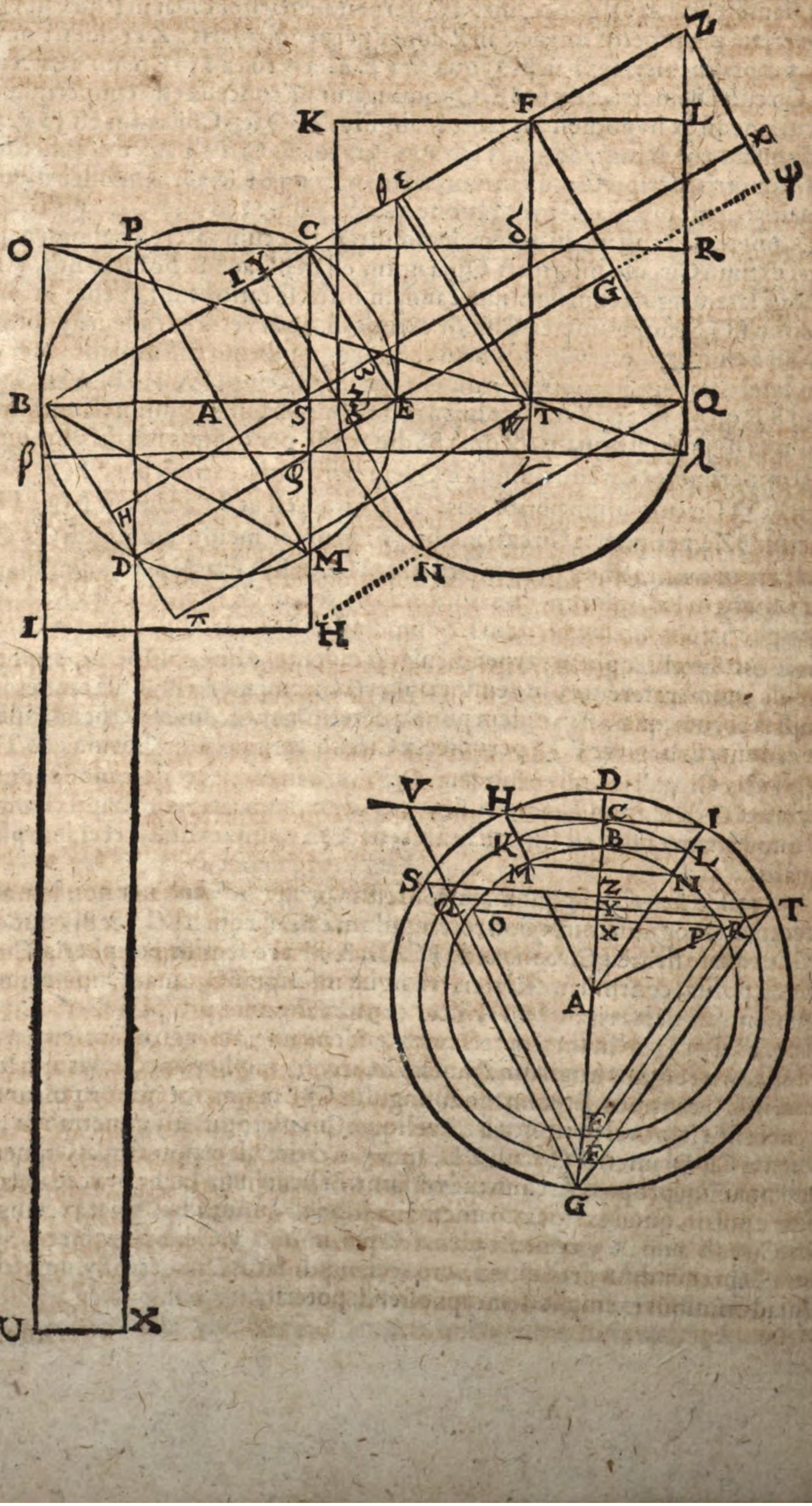
Hiſce ſic oſtenſis quoniam confeſtim prop: *Archimed*: nec non lemmate antecedente cognoſcitur, quod rectangulum è BD (æquali EC) & BF, quod eſt BFGD æquale ſit areæ Circuli medii BCED: & BF pro ſemiſſe peripheriæ Circuli medii poſita, continuata ſit lateri trianguli inſcripti BC, quare hinc primum argumentum occurrit, talem ſcilicet continuationem pro peripheria Circuli propoſiti, ſi quando in lineam rectam extendenda, veram legitimam ſeu naturalem eſſe, præ reliquis nimirum à puncto B Circuli peripheriam quovis alio loco, quam in C ſecantibus. Etenim modò angulus CBE major aut minor poſito fuerit, neceſſe eſt, ut vel peripheria CE reliquæ Circuli totius aſymmetra fiat; vel ſubtenſa CE Diametro Circuli BE, quæ pro rationali exponitur, aſymmetra; quod utrumq; propos: Archim: adverſatur. Et licet juxta Lem: præced: id contingere poſsit, quod ex linea Diametro irrationali, unum latus fiat rectangulo areæ Circuli æquale; tamen eadem ſemper mutata vice hêic perimetro Symmetra deprehenditur, reliquum verò rectanguli latus Diametro Symmetrum, velut id omnibus exemplis deinceps oſtendi poterit.

Lem: 2. hujus.

Pr: 1. de Circulo

Lem: 2. hujus.

Alterum


Z
F
K
L
α
ψ
θ ε
P
C
O
δ
R
I Y
G
ω
B
A
S
E
T
Q
β
λ
φ
H
D
M
N
I
π
H
U
X
V
H
D
C
I
K
B
L
S
M
Z
N
T
Q
Y
O
X
P
R
A
E
F
G

Alterum argumentum hujus probationis de legitima seu Naturali continuatione lineæ rectæ pro peripheria assumendæ, per latus trigoni æquilateri inscripti BC octo alia rectangula singula areæ Circuli propositi æqualia, & super suis lateribus extructa, luculenter suppeditabunt; hoc solo observato, *quod lineæ parallelæ pro iisdem habeantur, ut alias fieri oportet.*

Igitur in assumta Diametro Q $\frac{z}{3}$ æquali BE, quia FT quarta pars peripheriæ in linea recta est; describitur ab æquali K $\frac{z}{3}$, & Q $\frac{z}{3}$ rectangulum secundum K L Q $\frac{z}{3}$ areæ Circuli medii æquale, ubi K $\frac{z}{3}$ parallela est CM lateri trianguli inscripti; alterum verò latus nempè Q $\frac{z}{3}$ continuatur Diametro BE.

Tertium rectangulum areæ Circuli ejusdem æquale, est CHIO, constans ex CH, æquale ZQ, & ideo $\frac{1}{4}$ peripheriæ, atq; CO seu SB $\frac{3}{4}$ Diametri, juxta Lemma præcedens, ut & omnia etiam sequentia. *Lem: 2.*

Quartum enim rectangulum areæ Circuli æquale, nempe OPXV, constat ex OP $\frac{1}{4}$ Diametri, & tota peripheria, id est, linea OV.

Porrò quintum rectangulum areæ Circuli æquale, & propositioni de laterum eductione conforme, est OR QB. Nam & hoc facilè demonstratur rectangulo primario BFGD æquale, in hunc modum: Quoniam triangula rectangula FBQ, & CBE æquiangula sunt, habent igitur latera circa eosdem angulos proportionalia. Quare ut est BF ad semissem BC, hoc est CS; Sic B Q ad semissem BE id est CE. Quum igitur rectangulum ab extremis terminis æquale sit ei, quod à terminis mediis & contra; Medii autem sunt B Q & C S, extremi B F & CF: Quocirca rectangulum descriptum à B Q & CS hoc est O R Q B, æquale est descripto primario à B F & C E. *Prop: 4. l. 6.* *Prop. 16. l. 6.*

Sextum rectangulum areæ Circuli æquale ideo est FQNY, quia reciprocè constat lateribus geminatis ac dimidiatis cum proximo. Est enim F Q dimidia BQ, sed QN dupla CS.

Septimum rectangulum areæ Circuli æquale est O♌♈♑ constans lateribus O♌ & ♌♈, quorum illud $\frac{3}{4}$ est de BQ: hoc eadem portione excedit C S (ut anteà ostensum est) tantundem; est enim æquale ♑♋, quia æquale C♎. *Lem: 2. hujus.*

Octavum rectangulum areæ Circuli æquale hêic reperitur B♑ W♐. Nam & hoc constat uno latere nempe B♑ duplo præcedentis ♌♈, & alio ♑ W subduplo ejusdem præcedentis O♌.

Nonum deniq; rectangulum areæ Circuli æquale hìc est B Z♓♓, constans lateribus B♓ seu Sl dimidia perpẽdiculari trianguli æquilateri inscripti, quæ est $\frac{3}{8}$ Diametri B E: Et B Z $\frac{3}{5}$ perimetri ejusdem Circuli medii, juxta ea, quæ superius ostensa sunt. Hæc novem rectangula, quæ singula areæ propositi Circuli ex ea hypothesi sunt æqualia, quâ BF linea recta ab initio supposita est semissi peripheriæ ejusdem Circuli æqualis, (quinetiam modo plura similia rectangula hêic fierent) quando pro laterum suorum dispositione diligenter examinantur, reperiuntur singula unum latus habere planè conforme lateri alicui trium trianguli æquilateri inscripti B C M: hoc est, aut eidem continuatũ aut parallelum: Reliquum autem eodem modo, Diametro B E, vel etiam M P; adeò ut nullum amplius dubium esse possit, quin hoc argumento cum superiori conjuncto satis ostensum sit id, quod primum propositionis membrum habet, nempe lineam rectam, si quando pro peripheria &c. ponendam naturali ductu lateri trigoni æquilateri inscripti continuari. Et quidni? siquidem necessum est *Lem: 2.*

unum latus in quocunq; hujusmodi rectangulo cum peripheria cognationem habere, alterum verò cum Diametro Circuli ejusdem seu potius ex eadem esse, prout Archimedis propositio & præmissum Lemma nostrum efflagitant.

Prop: 1. de Circ: Lem: 2.

Verum ut areæ horum Circulorum omnes in uno rectangulo repræsententur, primum producatur ß γ in λ, donec occurrat ei linea R λ à Z continuata; Deinde Diagonius à λ per T in O ducatur; Ergo manifestum est, in rectangulo ß O R λ aream maximi horum Circulorum contineri; Nam in hoc si spacium γ Q monas fiat, erit totum rectangulum illud ß O R λ part: talium 16: area verò medii Circuli in rectangulo prius ostenso O R Q B; vel in rectangulo O ♌ γ ß 12 part: earundem; Et demum area Circuli infimi 9 part: in rectangulo O ♌ T B comparativè inter sese, per omnia, ut in explicatione Lem: anteced: ipsorum ad invicem mensurationes oboriebantur.

Prop: 43. l. 1.

Lem: 1. & 3.

Porrò secundum propositionis hujus membrum paucissimis demonstratur, quando in figura adjecta satis perspicitur, quemadmodum B Q & B T rectè pro semiperimetris extremorum Circulorum adsertæ, Diametro Circuli medii B F continuantur : Rursus verò linea recta pro semiperimetro Circuli medii nempe B F Diametris extremorum B C & B θ continuatur.

Tertium propositionis hujus membrum de symmetria B C lateris trianguli æquilateri inscripti, & B F asserenda, illud est, quod veræ Cyclometriæ initiũ dat, dum Circulum rationaliter ἡσὺ κατ' ἐπισημονικὸν λόγον tractandum ab irrationali ac incerta ejus mensura discernit. Nam tunc etiam inscripta figura trianguli ordinata Circulo symmetra erit, ut infrà ostendetur. Hanc igitur symmetriam nunc duplici demonstratione declarabimus. Prior è consectario prop: Archimedis de Circulo elucet, quum Lemma 2. antecedentium simul huc accommodetur; oritur enim inde talis ratiocinatio: Si area Circuli verè ac naturaliter intra illud rectangulum includitur, cujus unum latus aut est Circuli ejusdem radius, aut huic commensurabile; & cujus alterum latus aut est semisis peripheriæ ejusdem Circuli, aut huic commensurabile; certè latus trianguli æquilat: inscripti symmetrũ erit lineæ rectæ pro semiperipheria Circuli ejusdem medii expositæ. At prius verum est; verum igitur & posterius. Propositio in consectario Archimedis prop: 1. de Circulo & nostro Lemmate 2, ut dixi, fundatur. Quia verò per nonnulla rectangula inter novem aream Circuli medii referentia, res est manifesta, non dubium est, quin absq; qualitatis laterũ mutatione idem in reliquis similiter verificetur. Verbi gratiâ: Rectangulum B F G D Circuli medii aream includens constat ex ipso radio & semiperipheria: Item rectangulum B Z κ ν aream Circuli ejusdem similiter continens, duobus constat lateribus, quorum B ν radio symmetrum est, utputa ejus $\frac{7}{4}$ p: continens, cum sit de tota Diametro $\frac{7}{8}$. Alterum verò hujus rectanguli latus positione est $\frac{3}{7}$ peripheriæ Circuli. Ergo similiter in rectangulo O R Q B erit B Q quod Diametro B E continuatur, & latus unum hujus rectanguli est, aut radio, aut peripheriæ medii Circuli symmetrum, & alterum similiter latus utputa B O quod parallelum est lateri trianguli inscripti C M, aut radio, aut peripheriæ hujus medii Circuli symmetrum. Verum quia B Q per B E Diametrum continuatur, & ideo potius ad naturam & symmetriam hujus accedit, quocirca inter alterutrum necessariò inductum rectè pro propositionis connexione pronunciandum est, B Q, quæ dimidia est peripheriæ Circuli maximi, symmetram esse

Prop: 1. de Cir. Lemma 2.

Lemma 4.

Lemma 2.

radio

radio AE: & BO, id est dimidium de BC latere trianguli inscripti symmetram esse peripheriæ Circuli medii. Nec factâ per omnia reliqua rectangula inductione, quicquam in ipsis dissimile est, aut reperiri potest. Si igitur illud verum, legitimũ, ac naturale est, quod nos in Lemmate præced: 2. ex Archimede ostendimus, ut est verisimũ; hoc quoq; quod nunc etiã in ultimo exemplo attulimus, æquè verum erit, ut & in reliquis rectangulis in universum, quæ è demonstratis aream Circuli medii referunt. Nec certè dissimilis ratio est in lateribus rectangulorum areas Circulorum extremorum hêic similiter ostendentium, quod quoq; animadversione ejus dignum judico, qui veritate unicè delectatur. Nam ad idem certificandum, quia ℔λ & ℔O rectangulum constituunt ORλ℔ areæ maximi horum trium Circulorum æquale (ut superius ostensum est, & ex Archimedis prop: manifestũ) quia ℬλ ex hypothesi æqualis est $\frac{1}{2}$ peripheriæ ejusdem Circuli maximi, & Rλ seu O℔ ipsius radio, ex iis, quæ antea demonstrata sunt. Quum igitur nunc rectangulum BZ↓D rectangulo priori ORλℬ æquale sit, siquidem maximus Circulus medium superat rectangulo GZ, id est $\frac{1}{4}$ totius DZ (dum hi Circuli eandem rationem inter se servant, quæ est 16 ad 12, hoc est sesquitertiam.) Proinde dum de symmetria laterum hujus ultimi rectanguli BZ↓D quæro, cum radio & perimetro Circuli maximi, nonne confestim se offert latus BZ, quia continuatur Diametro Circuli maximi horum Bθ, ejus etiam radio seu semisi θE esse commensurabile? similiter BD, quæ radius est Circuli medii, peripheriæ Circuli maximi partem symmetram esse, ut propositio Archimedea in nostro Lemmate planè verificetur. Idem, si id per Circulum infimum aliquis tentet, reperiet. Quum igitur veritas totius propositionis in his exemplis abundè manifestata sit, nec contraria dari possint, ejus connexio quoq; erit vera. *Lem: 2.* *Lem: 1.* *Lem: 2.*

Altera demonstratio symmetriæ lateris trianguli inscripti BC cum exposita semiperipheria BF has illationes admittit, quas simul & Geometricè, & posteà in numeris sumus ostensuri.

1. Si ✓ $\frac{1}{12}$ peripheriæ totius Circuli medii, & $\frac{1}{4}$ totius peripheriæ Circuli maximi trium; vel $\frac{1}{3}$ peripheriæ Circuli infimi, eandem inter se magnitudinem habuerint, certè ✓12 quæ mensura deputata est peripheriæ Circuli medii qualium ✓16 & ✓9 reliquorum fuerint, ejusdem Circuli medii peripheriam mensurabit; sed verum prius; verum igitur & posterius.

Antecedens propositionis non solum per bina lemmata præced: ostendebatur, sed etiam adhuc manifestius in rectangulo sexto præmiss: indicatur. Rectanguli enim istius nempè FQNY, quia unum latus utputa QN, quum sit latus trianguli æquilateri Circulo medio inscripti & in mensura sua ✓3, qualium Diameter $\frac{3}{3}$ Q, vel BE assumta est 2 part: ut ex demonstratis multoties liquet; alterum latus quippe FQ ✓ $\frac{1}{12}$ de tota peripheria Circuli medii seu ✓ $\frac{1}{3}$ de semiperipheria ejusdem, utputa de BF inveniebatur; quæ etiam FQ sine controversia dimidia pars est de BQ; & ideò $\frac{1}{4}$ peripheriæ Circuli horum maximi (vel $\frac{1}{3}$ peripheriæ Circuli infimi) & ✓ $\frac{1}{12}$ peripheriæ Circuli medii planè sunt æquales. *Lem: 2. & 3.* *Lem: 2. & 3.*

Consequens connexi eam necessitatem quoq; affert, ut si ✓12 pars circumferentiæ totius Circuli medii eandē circumferentiam, quanta fuerit, non mensurabit, neque etiam latus FQ rectanguli dicti FQNY mensurabit $\frac{1}{4}$ partem Circuli maximi, aut $\frac{1}{3}$ Circuli minimi

horum trium, eò quod divisio peripheriæ Circuli medii in ✓12, ceteroquin numerum quadratum, & quidem talem numerum quadratum, qui respondebit $\frac{1}{4}$ peripheriæ Citculi maximi tunc non relinquit. At hujusmodi requiritur, si dictum latus F Q, præcisè seu absolutè $\frac{1}{4}$ pars erit peripheriæ Circuli maximi. Ergo ✓12 pars peripheriæ Circuli medii, vel quod idem est ✓ $\frac{1}{12}$ ejusdem, peripheriam eandem veram qualitercunq; statuendam mensurabit. Sic quoq; peripheriam Circuli maximi ✓16, & minimi ✓9 metientur, quum hæ quantitates eorundem Circulorum notæ sint, quippe homologis lateribus ipsorum in universum adsignatæ, ut in explicatione Lem: 3. cernitur.

Lem. 3.

2. Quandoquidem modò ostensum est latus F Q etiam ✓ $\frac{1}{16}$ seu $\frac{1}{4}$ partem esse peripheriæ Circuli maximi horum adscriptorum, sed & hujus duplum B Q ✓ $\frac{1}{4}$ seu $\frac{1}{2}$ ejusdem peripheriæ; Quum igitur BE per quam continuatur BQ antea rationalis exposita sit, nempe 2 part: Sunt ergo duæ lineæ rectæ in una continuatione longitudine rationales nempe BE & BQ, proinde etiam inter se Symmetræ. Quibus sic ostensis dico, B C hoc est latus trianguli æquilateri Circulo medio inscripti cum Semiperipheria B F & ideò etiam tota peripheria hujus commensurabile esse. Est enim ut B E ad B Q, sic BC ad B F, & quia B E mensurat B Q, quum ambæ sint rationales longitudine, commensurabiles etiam erunt longitudine BC & BF. Quod iteratò nunc & quidem demonstrativè tertium hujus propositionis membrum concludit.

Prop. 10. l. 10.

NUMERI.

Ceterum adhuc in majorem evidentiam numeralis ostensio accedat. Proinde primò pro mensura perimetri Circuli medii, ponamus talem numerum, quem metiantur ✓12 dum Diameter ejus rationalis fuerit; & dum in terminos propius intuemur, ponamus pro perimetro Circuli ✓18252, pro Diametro autem ejus 43 part: qualem analogiam nos inter perimetrum ac Diametrum ejusdem Circuli dudum è tribus, quæ suis locis sequuntur, *æquationibus* adinvenimus. Ergo divisus ✓18252 in partem sui totius ✓12 relinquit in quoto numerum quadratum pro F Q ✓1521, quippe cujus latus est 39, correspondens in Symmetria ✓ $\frac{1}{16}$ seu $\frac{1}{4}$ peripheriæ Circuli horum maximi: Cujus duplus ✓6084 est pro latere B Q nimirum Semiperimetro ejusdem Circuli maximi. Medii autem peripheriæ semisis, quia est B F fit ea in irrationalibus ✓4563. Sed & B T ✓3422 $\frac{1}{4}$ numerus quadratus, scilicet respondens Semiperipheriæ Circuli horum minimi. Habeht ergo hi numeri seu lineæ nempe B T ✓3422 $\frac{1}{4}$, B F ✓4563, & B Q ✓6084, ordine pro Semiperimetris horum Circulorũ positæ, se non solum ad invicem, ut perimetri ipsorum in potentia, nempe ut: 9. 12. 16: Sed & his numeris sunt Symmetræ. Nec etiam aliter fieri debet, aut potest, ut satis è demonstratis patet.

Lem: 3.

Contra autem, si de numero adsignato B Q utputa ✓6084 ultimus rejiciatur, ut sit remoto signo ✓6080; ordine quidem succedunt B F 4560; Item B T 3420, ut scilicet perimetri potentiâ ad invicem, nempe in eadem proportione qua numeri 16. 12. 9. reperiuntur. Sed quia duplum B F quippe ✓18240 neutiquam metitur ✓12 pars ejusdem, ergo neq; F Q in quadratum numerum transit, quod aliàs omninò debuisset, modò aut $\frac{1}{4}$ peripheriæ Circuli maximi, absolutè, ut requirebatur, respondisset; aut latera, nempe Q N & F Q rectangulum

Lem: 2. hujus.

fecissent

feciſſent areæ Circuli ex hypotheſi, non minus, quam EC & BF, æquales.

Quartum prop: hujus membrum tribus, ut ajunt, verbis oſtenditur. Quum enim baſis trianguli BC ac baſis peripheriæ Circuli BZ lineæ ſint commenſurabiles; erunt ſub eadem altitudine, rectangulum menſurans triangulum æquilaterum inſcriptum BCωκ, & rectangulum quod Circuli aream metitur, utputa BZκκ inter ſe commenſurabilia. Unde quoq; abſolutæ quadraturæ aliquando in medium producendæ ſpes oritur certiſsima. *Prop: 1. l. 6.*

Quintum ac ultimum membrum per ſe è præcedentibus patet, quemadmodum ſcilicet etiam pro opinione vulgi perimeter ejusdem Circuli Diametro incommenſurabilis longitudine exiſtat, quamvis minimè potentiâ. Quæ enim eſt menſuratio BE Diametro ad BC latus inſcripti trianguli, eadem quoq; erit eidem Diametro BE ad Semiperipheriam BF, adeoq; totam peripheriam, ſi quidem BC & BF ſunt commenſurabiles. At BE & BC non longitudine ſed potentia duntaxat ſunt commenſurabiles, quod ſuperius oſtenſum reliquimus. Ergo neq; Diametro peripheria longitudine, ſed ſolâ potentiâ commenſurabilis eſto. *Per converſ. 12. lib. 10.*

Corollaria.

1. *Radii ac Semiperipheriæ*, vel etiam Diametri & quadrantes peripheriæ alternorum Circulorum, qui ab angulo hexagoni ordine inſcribuntur, latera eſſe poſſunt rectanguli areæ Circuli æqualis. Exempla hêic ſunt in rectangulis. 5. 6. 7. & 8. præmiſsis, quando ad lemma 1. anteced: hujus capitis examinentur: Ubi id identidem cognoſcere licet, Archimedis Prop: & hêic verificari, nempe è Symmetris lateribus Diametri & peripheriæ utrinq; & non aliter Circuli aream confici.

2. Diametri & perimetri Circulorum, quotquot ab angulo hexagoni ordine invicem adſcribuntur, alternæ longitudine ſunt commenſurabiles; ut BC Diameter Circuli minimi, commenſurabilis longitudine eſt BF Semiperimetro Circuli medii; Sic BE Diameter Circuli medii commenſurabilis longitudine eſt BQ Semiperimetro Circuli horum maximi &c. Non ſecus ac latere alicujus quadrati rationali expoſito, dictum Quadratum ſi per Diagonios continua ſerie duplicetur, quod tunc alternæ Diagonii inter ſe, & cum primo ſeu originali Quadrati latere longitudine Symmetræ reperiantur.

3. Quoniam in prop: hujus figura pulcrè per ſe patet, quòd conceſsâ ex hypotheſi lineâ aliquâ rectâ Semiperipheriæ alicujus Circuli æquali, reliquæ quoq; ſemiperipheriæ reliquorum Circulorum quotquot in infinitum ab angulo hexagoni ordine adſcribuntur in rectis lineis ſingulæ ex una eâdemq; hypotheſi repræſententur: ut conceſsâ ex hypotheſi BF lineâ recta æquali ſemiperipheriæ Circuli medii BPCE, etiam BT fit æqualis ſemiperipheriæ Circuli infimi, & BQ æqualis ſemiſsi peripheriæ Circuli maximi horum trium, & ita in infinitum. Verbi gratia; Modò hæc aſſcriptio uno adhuc Circulo externè locupletaretur, ut eſſent quatuor; ejus ſemiperipheria eſſet linea recta BZ &c. Quod etiam generaliter de omnibus Circulis ex communi angulo ordine ſic adſcriptis (ut & quæ ad Corollarium horum primum ſpectant) oſtendi poſſet, niſi propoſito compendioſius hêic inſerviendum foret. Nemo igitur amplius dubitare poteſt lineam rectam in natura exſtare peripheriæ Circuli æqualem: Si enim

lineæ rectæ, & curvæ non ſub eodem genere foren, tut eas eſſe diſſeruimus, nunquam proportiones, quæ curvis hic inſunt, ad rectas in infinitum usq; transferri poſſent, & contra: Illæ namq; magnitudines dicuntur ſub eodem genere eſſe, & rationem inter ſe habere, quæ poſſunt multiplicatæ ſe mutuo ſuperare. Quod quum in rectis hêic pro curvis ſubſtitutis concedatur, meritò olim Eutocius dixit, a nemine dubitari lineam rectam in Natura exſtare curvæ æqualem.

Defin. 3. & 5. lib. 5. Eutocius.

4. Quia per latera triangulorum æquilat: hiſce tribus Circulis inſcriptorum, potius quam per Diametros, Circuli ipſi rationaliter menſurantur, rectè igitur hæc latera, & maximè ipſorum poteſtates inpoſterum ad æquationes inter ſpacia diſsimilia in Circulo inſtituendas uſurpabimus. Sic quia poteſtas lateris trianguli inſcripti Circulo medio horum, B C eſt 3 part: Maximo verò inſcripti B E 4 part: & minimo deniq; inſcripti trianguli lateris B S 2 $\frac{1}{4}$ part: dum ipſa Diameter Circuli ſupponitur 2. p: Proindè ordine ſervato, in eadem ratione non modo hi tres Circuli, ſed etiam omnes ſimiles ipſorum partes reperiuntur, ac æſtimantur potiſsimum.

PROPOSITIO II.

Demonſtrare, quod continuatio lineæ rectæ pro Semiperipheria Circuli per hujus diametrum vera ac naturalis non ſit. Item, quod nulla figura ordinata Circulo inſcripta præter triangularem & huic Symmetram, nempe ſexangulare Circulo ipſi commenſurabilis eſſe potuerit.

Contrariis juncta ſe poſitis, ut veritas in ſuperioribus magis illuceſcat, exponatur hêic iterum Circulus medius trium ordine ab angulo hexagoni adſcriptorum, nempe B C E M, cui, ut prius, inſcribatur triangulum æquilaterum B C M. Deinde ductæ Diametro B E continuetur linea recta B F, ut fiat æqualis Semi-

Semiperipheriæ BCE ſaltim ex hypotheſi; erecta autem normalis ab F in lineam rectam continuatam per latus trigoni inſcripti B C cadit in Q, & ipſa B Q fit æqualis Semiperipheriæ Circuli maximi trium; B T verò æqualis Semiperipheriæ ipſorum minimi, per ſolam transmutationem laterum, retento angulo F B Q in eadem, quâ prius, quantitate. At talem continuationem lineæ rectæ BF per Diametrum B E, item B Q per Diametrum Circuli maximi B θ, & tandem B T per Diametrũ Circuli minimi BC, illegitimam ac præter naturam eſſe ſtatim hêic apparet. Eſto enim quod facta BD æquali radio BH, conſtituatur ex eadem & BF rectangulum BFGD areæ Circuli expoſiti æquale, quia tamen fabrica in hoc luxata eſt, quod non ex lineis à natura, ut in figura ſuperiore, oblatis tale rectangulum fiat, certè à natura proficiſci non poteſt. Similiter abſumta à linea BH, portione B I æquali C S, quando ex B I & B Q deſcribatur rectangulum B Q R I priori B F G D æquale, neq; tale à natura inſcriptæ figuræ triangularis B C M promanat, ſiquidem non modo in linea aliena ac aſymmetra latus unum nempe BI quæritur, ſed etiam BI luxata eſt, nec in diſpoſitione pari convenit cum C S, aut ulla hêic congruentia intra easdem parallelas cernitur; Contrà ac in novem rectangulis ſuperius oſtenſum reliquimus. Porro quia ſuperius demonſtratum eſt latus trianguli, nempe B C commenſurabile longitudine eſſe B F; quoniam igitur B E aſymmetra hêic eſt B C, erit etiam BE, aſymmetra B F. Neq; enim ex duobus lateribus Diametro Circuli aut perimetro utrinq; ſymmetris, ſed ex duobus lateribus, quorum alterum Diametro; alterum perimetro ſymmetrum fuerit, rectangulum naturaliter ac ſecundum Archimedis propoſitionem conſtitui debet areæ Circuli æquale.

Prop. 14 l. 10.

Archimed: prop. de Circulo.

Secundò nullam figuram ordinatè Circulo inſcriptam præter triangularem aut huic ſymmetram, ſexangularem, fore, quæ Circulo ipſi commenſurabilis eſt, de facili oſtendi poterit. Quum enim K M Diameter Circuli expoſiti ſit, cujus $\frac{3}{4}$ eſt M L diameter trianguli inſcripti, & eadem M L normaliter in latus B C cadat, per quam lineam ipſum triangulum ritè menſuratur, nec id ulli aliæ figuræ ordinatè inſcriptæ contingere poſsit, certe concluditur hinc, ſolum triangulum æquilaterum inſcriptum, (ut & circumſcriptum, quum hoc quadruplum ſit inſcripti) Circulo eſſe commenſurabile. Quod autem hexagonum inſcriptum BKCEMH (aut circumſcriptum, quod inſcripto ſymmetrum eſt) etiam Circulo ſymmetrum reperitur, ideò contingit, quia hoc trianguli duplum eſt. Sic & aliæ figuræ quæ triangulo eidem ſymmetræ ſunt, de quibus in capite ſequenti.

Hêic autem notatu digniſsimum eſt, nec leve myſterium, quod ulterius ſe extendat, figuram ſcilicet primam ordinatam triangulum puta æquilaterum, cum ultima ordinata quippe Circulo omnia ſymmetra poſsidere, ut ſunt peripheria, Diameter, & area, quod nullis ordinatis præterea cum ultimo commune eſſe repeires, ut in omnibus hiſce conveniant.

CAP:

CAP. VI.

Vbi requisita Symmetria omnium figurarum cum Circulo, quæ ad hujus Quadrationem spectant, ostenditur, idq; ex inventa, ac præmissa symmetria lateris, trianguli æquilateri inscripti cum Circuli ejusdem perimetro.

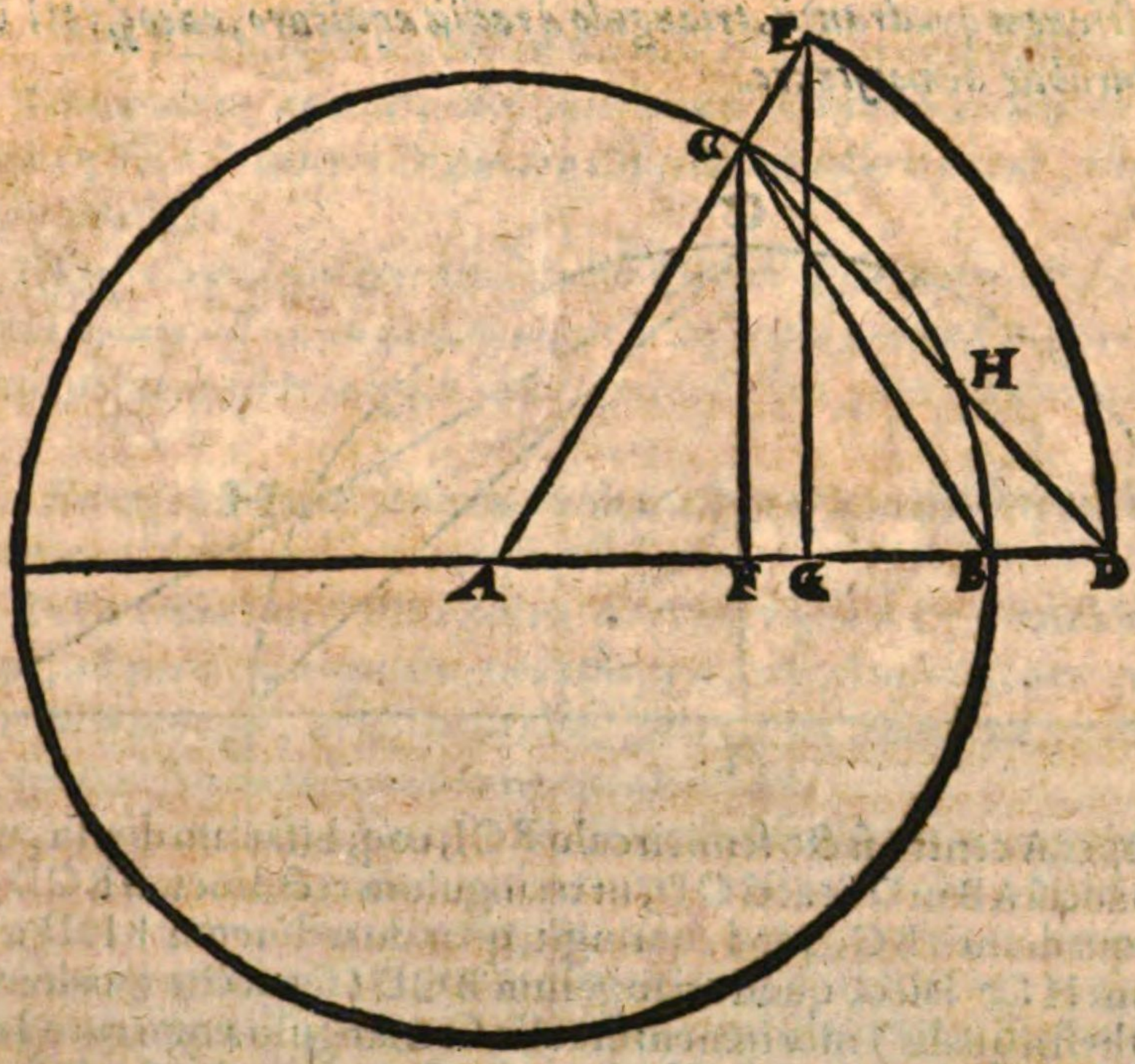
QUoniam inter eas figuras quarum symmetriæ cum Circulo ad perfectam hujus *Quadrationem* declarandæ veniunt, nulla prior esse videtur, quàm Sectio hexagoni æquilateri Circulo inscripti, quum pene ex hac, symmetriæ reliquarum originem trahant; Priùs illius sectionis symmetria cum toto Circulo demonstranda, quod licet de facili per proximè præmissam prop: fieret, dum reliquum à triangulo æquilatero inscripto, (aut hujus quantitate æquivalente B C ω κ) duplicato in sex æquales partes tributum singulas singulis sectionibus hexagoni discernat; unde rectè colligi potuit, quia ut totum, id est reliquum, toti, id est, triangulo duplicato, seu, quod idem est, hexagono inscripto; sic partes & toti & partibus symmetras esse; tamen evidentiæ causa ejusdem hexagoni sectionem cum toto Circulo, vel quod idem est, triangulo subjecto in sequente propos: commensurabilem declarabimus.

PROPOSITIO I.

Sectionem hexagoni ordinati Circulo inscripti tàm Sectori hexagoni, adeoq; toti Circulo; quàm triangulo à radiis ejusdem Circuli descripto commensurabilem ostendere.

Revocetur huc figura prop: 1. cap. IV. quæ satis hexagonicæ Sectioni accommodata est, licet generatim ibi præmissa est, ad indicationem lineæ rectæ peripheriæ æquandæ, sub ea conditione, quâ sectio aliqua in æquale triangulum prius transformatum fuerit, vel contra. Sitq; nunc in eadem figura Sector hexagoni ordinati inscripti C A B: Sectio verò ipsa hexagoni B C, unde triangulum C A B illud est, quod radiis Circuli constare diximus.

Porrrò producatur A B radius in D, ita ut B D sit basis trianguli rectilinei B C D Sectioni hexagoni B C æqualis. Quoniam gitur superius in eadem figura ostensa fuit E G linea recta æqualis peripheriæ C B, ex hypothesi, & eadem linea E G parallela C F, quæ hêic perpendiculariter cadens super radio A B eum bifariam dividit in F: Quare expositio radio A B rationali; quia est ut A B ad suum dimidium A F, sic A D ad A G, erit itaq; etiam A G dimidium de A D.



Porro quia CF dimidia pars eſt lateris trianguli æquilateri inſcripti, & ideo ſymmetra longitudine cum EG: Et quia eſt, ut CF ad EG ſymmetra ad ſymmetram, ſic AF ad AG,& per conſequens,in dupla ratione,AB ad AD: ſunt igitur etiam AB & AD inter ſe ſymmetræ. Et quia AB rationalis aſſumta eſt, quæ totum triangulum ACB menſurat; Erit quoq; BD baſis,adeoq; ipſum triangulum BCD rationale.Sed BCD triangulum ex hypotheſi æquale eſt Sectioni hexagoni BC, quare ipſa ſectio BC triangulo ex radiis ACB commenſurabilis eſt, ſeq; ad hoc habet ut numerus ad numerum. Et quia Circulus conſtat ſex hujusmodi triangulis à radiis deſcriptis, & totidem ſectionibus hexagonicis; erit igitur etiam una ſectio hexagoni BC toti Circulo commenſurabilis,quod ad demonſtrandum fuit propoſitum.

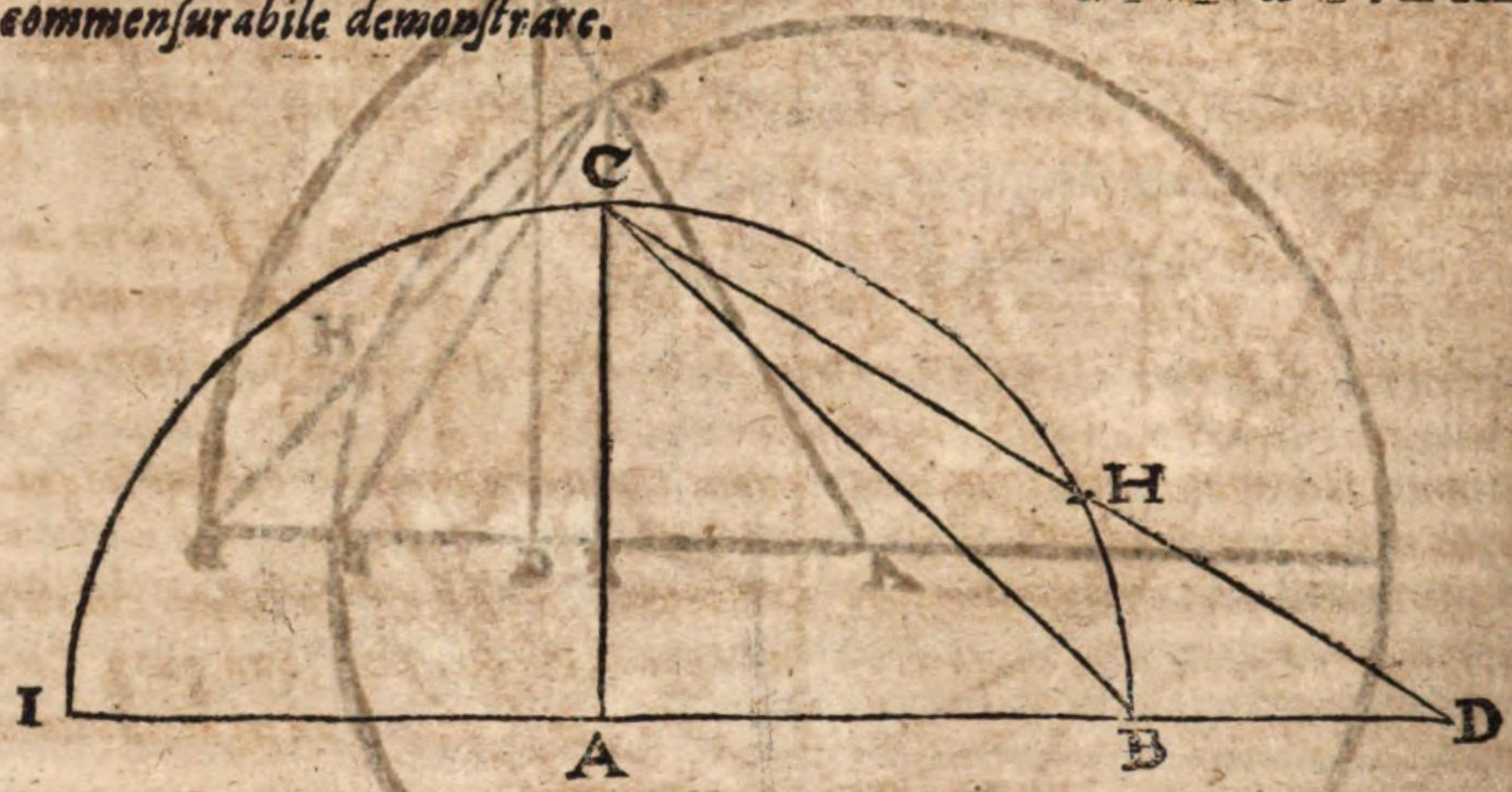
Prop: 1. 6. 5.
Prop: 10. l. 10.
Prop: 1. l. 6.
Prop: 5. l. 10.

Corollaria.

1. Hinc non difficile eſt monſtrare,eandem rationem eſſe inter latus trianguli inſcripti æquilateri, & peripheriam, quam ſubtendit, nempe $\frac{1}{7}$ Circuli; quæ eſt hêic inter AB & AD, vel inter triangulum æquilaterum à radiis ACB,& ſectorem hexagoni CAB: Siquidem CF ſemiſsis lateris trigoni ejusdem inſcripti,eandem rationem habet cum EG,ſeu ſemiſse peripheriæ tertiæ partis Circuli : quod ceteroquin nulli alii ſectioni congruit, & ideo ſingulare atq; notabile.

PROPOSITIO II.

Sectionem quadrantis, triangulo à radiis æquicuro, adeoq; toti Circulo incommensurabile demonstrare.



Super A centro facto semicirculo B C I, eoq; bifariam diviso per C A; Deinde productâ A B in D & actâ C D, ut triangulum rectilineum B C D æquale fiat
Axiom: l. 1. sectioni quadrantis B C; quod contingit, quando trilineum B H D æquale fuerit sectioni H C. Dico, quod triangulum B C D (seu sectio quadrantis B C ipsi ex hypothesi æqualis) incommensurabile sit triangulo æquicruro à radiis C A B.
Lem: 2. c. 5. Quum enim è superioribus constet, quod rectangulum è radio & semiperipheria Circuli aream contineat: Consequens est, ut Orthogonium à radio C A, & quadrante peripheriæ quartam Circuli partem, seu sectorem quadrantis C A B intra se comprehendat. Et quia A C radius est, erit igitur A D æqualis peripheriæ quadrantis B C ex hypothesi. At quoniam ut se habet A B ad B D, sic se habet
Prop. 1. l. 6. triangulum æquicrurum C A B ad triangulum B C D, seu, quod idem est, sectio-
Prop. 1. c. 5. nem Quadrantis B C: Ceterum A B radius atq; A D peripheria Quadrantis incommensurabiles superius ostendebantur; quod in eadem conditione sunt, quâ Diameter ac perimeter Circuli ejusdem; Hinc posito radio A B rationali, quia A D irrationalis superat A B rationalem, irrationali B D, erit quoq; B C D triangulum, hoc est, sectio Quadrantis B C, dicto triangulo æquicruro C A B incommensurabile, quando bases horum incommensurabiles fuerint. Quia verò Circulus constat quatuor æquicruris triangulis (seu Quadrato inscripto) & totidem sectionibus Quadrantis; Et quia sectio quadrantis irrationalis modò ostensa est Quadrato inscripto, erit quoq; toti Circulo incommensurabilis; quod erat demonstrandum, & iteratò de figura quadrata inscripta convincendum.

Corollaria.

Vide quadraturam hujus Lunulæ tum apud alios, tum Clarium in Geometria Mechanica.

Ex hac asymmetria sectionis Quadrantis Circuli cum quarta parte Quadrati inscripti, seu triangulo æquicruro à radiis, de facili colligitur, quod Quadratio Lunulæ Tetragonicæ, quæ facilimè se offert, nihil omninò ad Circuli veram quadrationem faciat, quandoquidem ipsa Lunula dicto triangulo æquicruro est æqualis, atq; ideò sectioni Quadrantis, ut ostensum est, incommensurabilis.

PRO-

PROPOSITIO III.

1. Circuli ſectio trigonica eidem Circulo eſt commenſurabilis.

2. Triangulum æquilaterum inſcriptum ſubquadruplum eſt circumſcripti, utriusq; verò Diametri Diametro Circuli, cui adſcribuntur, longitudine ſunt commenſurabiles.

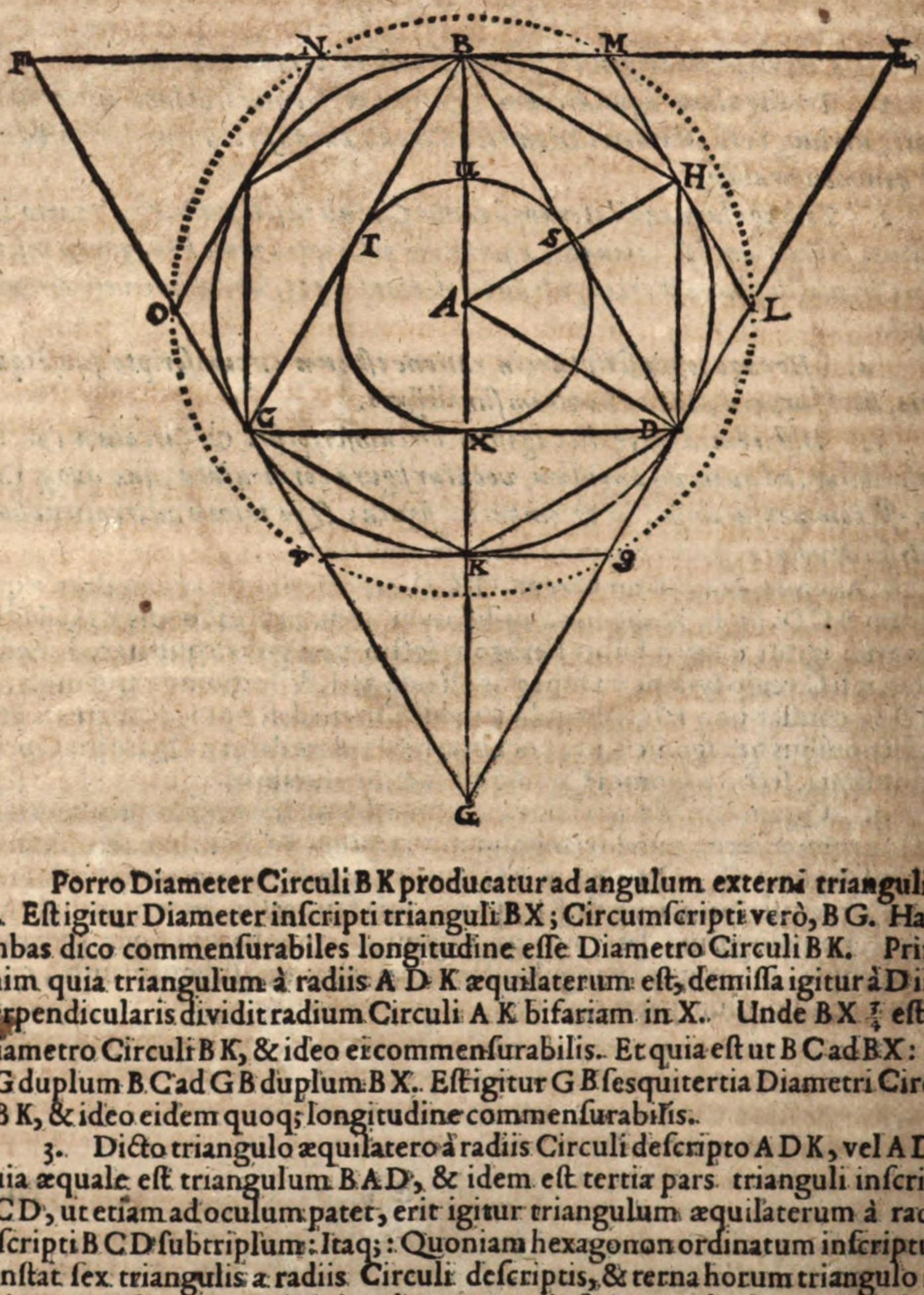
3. Triangulum æquilaterum à radiis Circuli deſcriptum, & à centro inſcriptum ſubtriplum eſt trianguli æquilateri inſcripti; unde hexagonon inſcriptum Circulo, duplum eſt trianguli æquilateri inſcripti, ſubduplum verò circumſcripti.

4. Hexagonon inſcriptum in ratione eſt cum circumſcripto ſubſesquitertia, licet horum latera ad invicem ſunt ἄῤῥητα.

5. Differentia inter hexagonon circumſcriptum & Circulum cui circumſcribitur, ad quemvis angulum, vocatur figura cornicularis, quæ quoq; Circulo eſt commenſurabilis, ut & omnes hæ figuræ; Quæ tamen ad irrationalium analyſin devolutæ ſymmetriam ad invicem amittunt.

A centro deſcribatur Circulus B C D, cui inſcribatur triangulum æquilaterum B C D, item hexagonon ordinatum cum ſuis ſubtenſis B I C K D H. Quoniam igitur quævis hujus hexagoni ſectio triangulo æquilatero à mediis adeoq; ipſi Circulo ſymmetra ſuperius oſtenſa fuit, & ſectio una trigonica, ut B H D S, conſtat uno tali triangulo à radiis Circuli deſcripto, & præterea duabus ſectionibus hexagonicis, ut ad oculum hêic videre datur; Quare juxta prius demonſtrata, ſectio trigonica Circulo eſt commenſurabilis. *Prop: 2. l. 4. Prop. 1. hujus. Prop. 1. hujus.*

2. Quum Circulo præſenti circumſcribatur triangulum æquilaterum E F G; primum dico, quòd triangulum inſcriptum B C D ſubquadruplum ſit circumſcripti E F G. Quia enim B C latus trianguli inſcripti ſubduplum eſt lateris circumſcripti trianguli E F, porrò quia figuræ ſimiles ſunt in duplicata ratione homologorum laterum; quia igitur laterum harum figurarum ratio eſt ſubdupla, erunt ipſa triangula ad invicem in ratione ſubquadrupla, quod etiam hêic ad oculum patet. *Prop. 3. l. 4. Prop. 19. l. 6.*



Porro Diameter Circuli B K producatur ad angulum externi trianguli in G. Est igitur Diameter inscripti trianguli B X; Circumscripti verò, B G. Hasce ambas dico commensurabiles longitudine esse Diametro Circuli B K. Primò enim quia triangulum à radiis A D K æquilaterum est, demissa igitur à D in X perpendicularis dividit radium Circuli A K bifariam in X. Unde B X $\frac{3}{4}$ est de Diametro Circuli B K, & ideo ei commensurabilis. Et quia est ut B C ad B X: Sic F G duplum B C ad G B duplum B X. Est igitur G B sesquitertia Diametri Circuli B K, & ideo eidem quoq; longitudine commensurabilis.

3. Dicto triangulo æquilatero à radiis Circuli descripto A D K, vel A D H quia æquale est triangulum B A D, & idem est tertia pars trianguli inscripti B C D, ut etiam ad oculum patet, erit igitur triangulum æquilaterum à radiis inscripti B C D subtriplum: Itaq;: Quoniam hexagonon ordinatum inscriptum constat sex triangulis à radiis Circuli descriptis, & terna horum triangulo inscripto æqualia sunt; Erit igitur hexagonon inscriptum duplum trianguli inscripti, & ideo etiam subduplum trianguli æquilateri circumscripti, quia hoc inscripti quadruplum fuit.

4. Si ducantur N O, P Q, L M lineæ tangentes Circulum & parallelæ lateribus trianguli inscripti B C D, erit hexagonon circumscriptum Circulo figuræ L M N O P Q. Ad talè hexagonon circumscriptum dico inscriptum hexagonon B I C K D H rationem habere subsesquitertiam, seu hoc ad illud se-

habere

habere ut numerus 3 ad numerum 4. Intelligatur enim Circulus etiam circumscriptus esse hexagono externo L M N O P Q è communi centro A: Quia autem talis est maximus trium inter superiores ab angulo hexagoni adscriptos, cujus radius M N: Medius verò Circulus præsens B C D cujus radius A B seu B l, & quoniam horum Circulorum ratio ad invicem inventa est, ut 12 ad 16, hoc est 3 ad 4, in minimis integris numeris; erit quoq; hexagonon inscriptum cum exscripto in eadem ratione. Sunt enim similes Circulorum partes, & ideò ejusdem rationis cum suis totis. Itaq; differentia inter triangulum B A H inscriptũ, & circumscriptum est triangulum B M H, quod ideò est $\frac{1}{3}$ pars trianguli B A H; quia ratio inter 3 & 4 est $1\frac{1}{3}$. Hæc autem etiam inter se symmetra esse facile intelliguntur: Sunt namq; ut numerus ad numerum. Verum ipsorum latera longitudine asymmetra sunt, siquidem inscripti hexagoni latus radius Circuli medii est; Circumscripti verò latus tertia pars lateris trianguli æquilateri circumscripti, quæ superius inter se asymmetra esse satis ostensa sunt, quando cum hisce conferantur.

Lem: 1. c. 5.

Lem: 1. & 3. cap. 5.

Pappus prop: 13. l. 5. collect: Mathemat:

Prop: 5. l. 10.

Prop. 1. c. 5.

5. Deniq; trilineum B M H, quod differentiam exhibet inter sectorem sextæ partis Circuli B A H, & sextam partem hexagoni circumscripti, quæ hêic in trapezio B A H M conspicitur, deinceps nobis *figura corniculata* vocabitur, etiam dum variis modis & formis in eadem quantitate describitur. Hanc autem *corniculatam figuram* non minus quàm omnes reliquas, quas præsens figura exhibet, Circulo præsenti symmetram esse dico. Quoniam enim sectio hexagoni B H, quæ pars trianguli est B M H, priùs ostensa fuit symmetra triangulo æquilatero B A H, & ideò quoq; Circulo symmetra: Similiter idem B M H, quia pars tertia modò ostensa est trianguli B A H, & ideo quarta pars trapezii B A H M: Quoniam igitur sector Circuli B A H, eidem Circulo symmeter est, quando hêic sexta pars sit ejusdem: Similiter quoq; trapezium B A H M, circulo præsenti symmetrum, quum symmetrum sit triangulo B A H, & proinde hæc se adinvicem habent ut numerus, ad numerum: Sequitur ergò, in trapezio B A H M reliquum, sublato sectore Circuli B A H, nempe trilineum, seu corniculatum B M H Circulo symmetrum esse. Idem quoq; sectioni hexagoni B H symmetrum est, quia hæc Circulo, ut superius demonstratum reliquimus.

Prop. 1. c. 6.

Prop. 5. l. 10.

Prop. 1. capitibus jun.

Postremò autem quoniam triangulum æquilaterum aliquod trium æqualium, quibus triangulum æquilaterum circumscriptum hexagonum circumscriptum superat, utputa E L M, idem magnitudine est cum trapezio B A H M, est igitur & illud Circulo commensurabile, & propterea omnes figuræ, quas præsens particulatim complectitur, Circulo commensurabilis, quod nunc plenâ inductione ostendisse sufficiat.

Hoc autem quamquam ita fuerit, tamen si ad irrationalium numerorum resolutionem, qui dictis figuris imponuntur, animum & operam adjeceris, nunquam ἄπιστμον istinc exportabis, impuritate aliqua semper ex irrationalium tractatione adhærescente. Exempla in ἀναλύσει triangulorum æquilaterorum relinquamus, quod ea maximè ad Circuli mensuram accedunt, ut cap. 1. expositum est, & adhuc magis in sequentibus demonstratur, quandoquidem inscriptum ac circumscriptum latera habent peripheriæ Circuli sui commensurabilia; Diametros verò Circuli Diametro.

Prop. 11 & 12.

Esto igitur, sit B K Diameter Circuli 2 part: erit B X $1\frac{1}{2}$ part: & C D latus trianguli

Prop. 2. huj.

trianguli inscripti $\sqrt{3}$, cujus dimidium CX $\sqrt{\frac{3}{4}}$ multiplicatũ in BX $1\frac{1}{2}$ seu $\sqrt{\frac{5}{4}}$ exsurgit capacitas trianguli inscripti B C D $\sqrt{\frac{27}{8}}$. Similiter pro triangulo circumscripto E F G, quia latus E F duplum est lateris inscripti B C, erit igitur illud $\sqrt{12}$ qualium Diameter B K est 2 part: & ideò E B $3\sqrt{}$: Sed & G B ex præmissis est 3 part: qualium K B. 2. Proinde multiplicatis inter se E B & G B, hoc est $\sqrt{3}$, & 3 procreatur area trianguli circumscripti $\sqrt{27}$. Qui numerus ut prior, qui numerator fuit, quia radice caret, scientiâ quoq; perfectâ ad quamvis resolutionis eductionem carebit. Nam neq; divisis $\sqrt{27}$ in $\sqrt{16}$ fit, exactè post resolutionem irrationalium (quotcunq; siphris adsumtis) triangulum inscriptũ, circumscripti pars quarta; & tamen facile ex his numeris ita esse intelligitur. Sic enim minuimus $\sqrt{27}$ quarta sui parte subscribendo ei $\sqrt{16}$.

Amplius ut tàm triangulum æquilaterum à radiis descriptum nempe A D H, quam M L E in demonstratis suis mensuris etiam per hosce numeros dignoscantur, ponatur primùm pro area A D H trianguli, latus AH. 1, cujus dimidium A S $\sqrt{\frac{1}{4}}$. Deinde D S $\sqrt{\frac{3}{4}}$: Est enim dimidium de D B $\sqrt{3}$. Ergo A S $\sqrt{\frac{1}{4}}$ in D S $\sqrt{\frac{3}{4}}$ multiplicatâ, provenit mensura trianguli dicti A D H $\sqrt{\frac{3}{16}}$; quod ideò, ut anteà ostensum, subtriplum inscripti est B C D nempe $\sqrt{\frac{27}{16}}$ quia numerator $\sqrt{3}$ illius ter in numeratore hujus continetur, in numero rationali utrobiq; eodem. Deniq; triangulum M L E pro sui mensura ac comparatione cum prioribus, ἀσύμμετρα habet, latus L M subtriplum E F, & ideò in numero irrationali $\sqrt{\frac{1}{9}^2}$ seu $\sqrt{1\frac{1}{3}}$; Præterea perpendicularem æqualem radio A H. 1: Quum igitur dimidietur M L fit M H. $\sqrt{\frac{1}{3}}$. et ipsum triangulum E M L $\sqrt{\frac{1}{3}}$ similiter. Hoc autem triangulo triangulum A D H superari per $\frac{1}{3}$ ipsius A D H facile ex divisione horum in invicem constabit: Nam $\sqrt{\frac{1}{3}}$ divisâ in $\sqrt{\frac{3}{16}}$. quotus erit $\sqrt{\frac{1}{9}^6}$, seu $1\frac{1}{3}$, id est ut 4 ad 3, sicut anteà erat ostensum. Quamvis igitur hi numeri irrationales scientiam in collatione figurarum ad invicem pulcrè pariunt; in resolutione tamen non item, quandoquidem perfectis radicibus destituuntur.

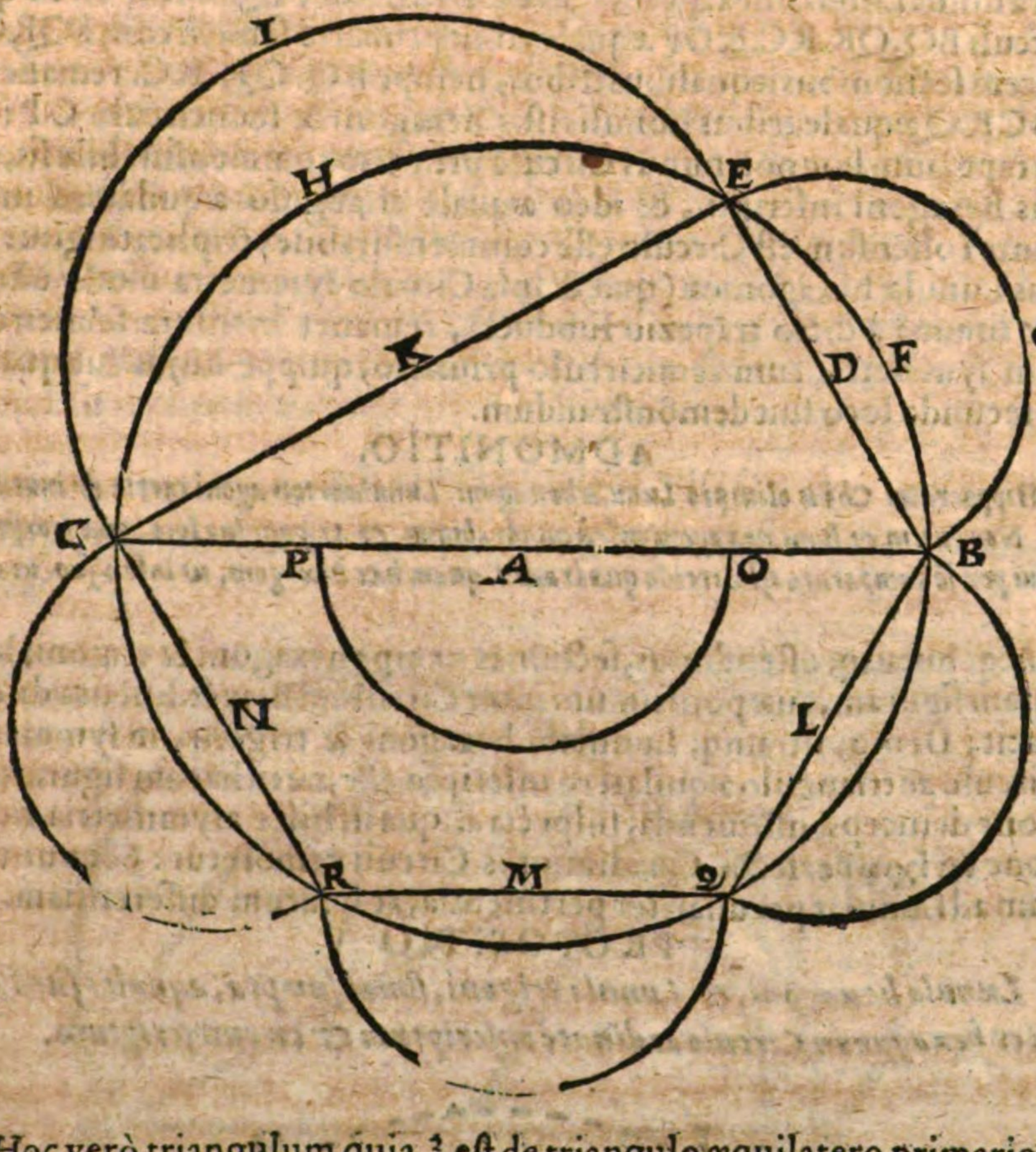
PROPOSITIO IV.

Lunulas hexagoni & trigoni describere: Earum symmetriam cum Circulo demonstrare, tùm conjunctim in uno triangulo, tum quoq; seorsim; & ostendere, quod, datâ harum alterutra, detur area Circuli.

Centro A describatur Circulus B C, in cujus superiore semicirculo B E C, è subtensa B E æquali radio A B quæ ob id sextam Circuli partem subtendit, describatur semicirculus B G E, & à reliquo complemento nempe E C, semicirculus E I C: Est igitur Lunula hexagoni descripta, in figura B G E F, & trigoni in figura E I C H. Quoniam autem semicirculi descripti super lateribus B E & E C trianguli rectanguli B E C habentis ad E angulum, in semicirculo, rectum, ambo æquales sunt semicirculo descripto super Diametro BC; erunt igitnr semicirculi B G E & B I C ambo æquales semicirculo primario B E C. Sed remotis sectionibus communibus, nempe B F E D sectione hexagoni; & E H C K sectione trigoni, sunt reliquæ ambæ Lunulæ æquales Orthogonio B E C.

Prop: 31. l. 3. *Prop: 31. l. 6.* *Axiom: 3. l. 1.*

Hoc



Hoc verò triangulum quia $\frac{1}{3}$ est de triangulo æquilatero primario Circulo inscripto, erit itaq; & istud Circulo commensurabile, quum ipsum triangulum æquilaterum inscriptum eidem Circulo ostensum sit commensurabile.

Porro quia Circuli sunt in duplicata ratione dimetientium, & quum detur B C 2 p: ac potentia ejus 4, erit potentia Circuli super B E, 1 & super E C 3 in qua quoq; ratione ad invicem semicirculi ipsi reperiuntur. Sunt igitur ambo semicirculi, in quibus Lunulæ ostensæ sunt, & quidem seorsim semicirculo primario commensurabiles. Sed & antea tam sectio hexagoni B F E D, quàm sectio trigoni E H C K eidem Circulo commensurabiles ostendebantur: illis igitur seorsim à rationalibus semicirculis sublatis, remanent separatim ambæ Lunulæ ipsi Circulo primario B E C commensurabiles. Quæ priore loco demonstrasse oportebat.

Pro: 1. 6. 5.
Prop: 2. l. 12.

Prop: 5. l. 10.
Prop: 1. & 3. hujus.

Secundò, quia palam est, datâ Lunulâ harum alterutrâ, alteram quoq; dari; quum triangulum B E C notum sit, intra quod ambæ comprehenduntur. Detur itaque hoc loco, ex hypothesi, Lunula hexagoni quæ intra tres semicirculos æquales inferiorem Circuli hujus primarii partem, hoc est, ejus semicirculum ter subtendat; Quin etiam super A centro quartus semicirculus describatur nempe O P, ceteris tribus æqualis. Dico igitur, quod inventa mensu-

mensura unius Lunulæ hexagoni, Circuli area detur; Quoniam enim quatuor semicirculi BQ.QR.RC.& OP æquales sunt primario semicirculo BQRC; Sublatis autem sectionibus æqualibus tribus, nempe BQ. QR. RC. remanet trapezium BCRQ æquale tribus Lunulis istis hexagoni & semicirculo OP: Quùm igitur trapezium hoc non minus Circulo primario commensurabile sit, quia est semissis hexagoni inscripti, & ideo æquale triangulo æquilatero inscripto, quod antea ostensum est Circulo esse commensurabile; triplicatâ igitur mensurâ unius Lunulæ hexagonicæ (quæ & ipsa Circulo symmetra modò ostendebatur) & summâ à dicto trapezio subductâ, remanet mensura semicirculi PO etiam in symmetria cum semicirculo primario, quippe hujus subquadrupla; Quod secundo loco fuit demonstrandum.

Axiom 3. l. 1.

Prop. 3. hujus.

Prop. 1. c. 5.

ADMONITIO.

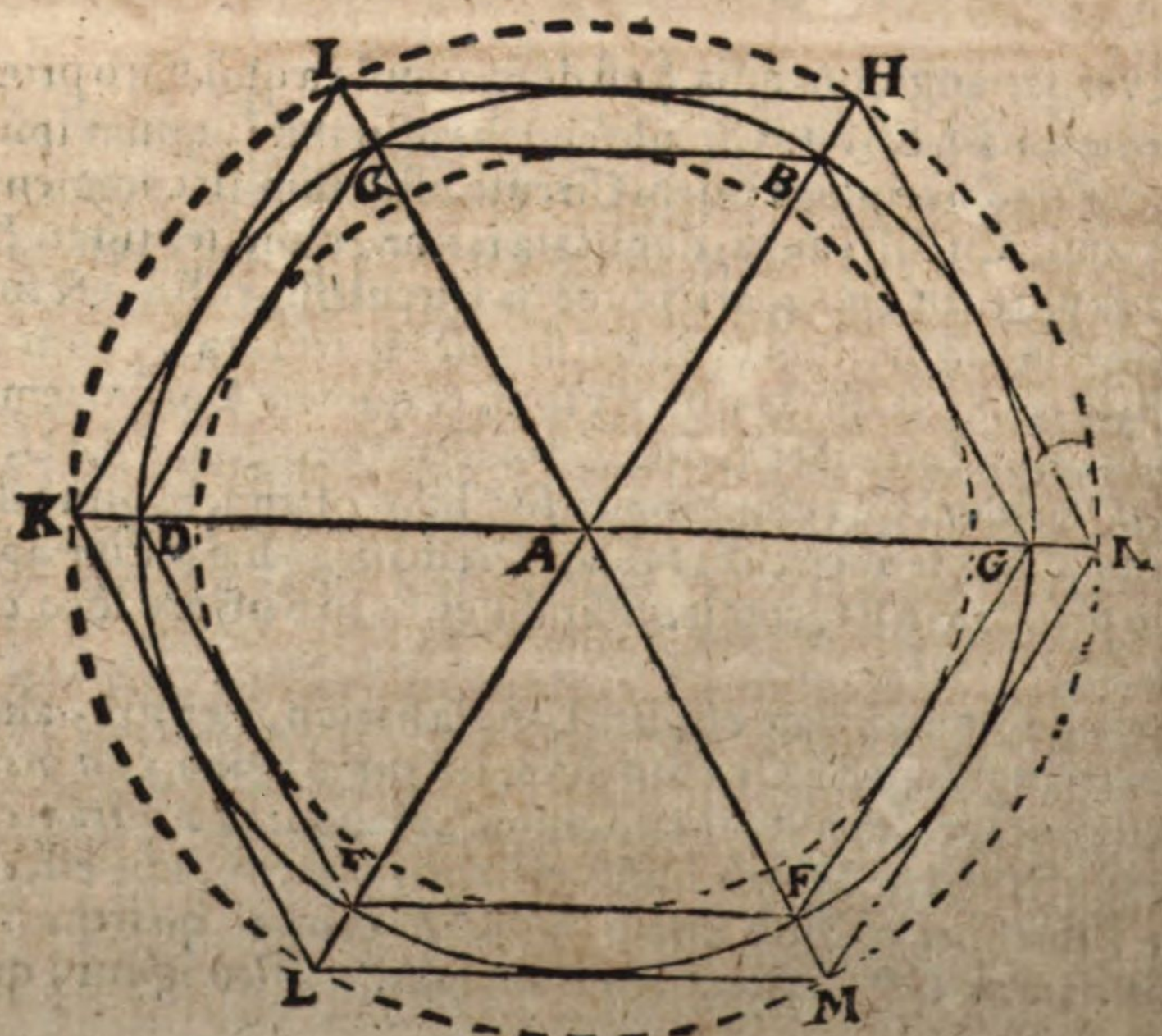
Hippocrates Chius olim pro Lunula hexagoni, Lunulam tetragoni inepte & inutiliter quadravit. Nos autem & hanc hexagoni infrà quadrabimus, & trigoni suo loco, quæ seorsim inventa non minus per se comparata est Circulo quadrando, quam hæc hexagoni, ut infra suo, ut dixi, loco videbis.

Conclusio capitis hujus.

Atq; hucusq; ostendimus, sectiones nempe hexagoni & trigoni; Item corniculatam figuram, quæ potissimum inter Circulum & rectilineum discerniculum facit; Deniq; utramq; Lunulam hexagoni & trigoni, in symmetria cum ipso Circulo ac triangulo æquilatero inscripto esse, ne in harum figurarum comparatione deinceps instituenda, suspecta aliqua in hisce asymmetria nos ab inventione ἐντύχνῳ perfectæ Quadrationis Circuli remoretur: Sequuntur nunc quædam ad Lunulas peculiariter pertinentia, ac ipsarum differentiam.

PROPOSITIO V.

Lunula hexagoni, & Lunula trigoni, simul sumptæ, æquales sunt differentiæ inter hexagonon Circulo ordinatè inscriptum & circumscriptum.



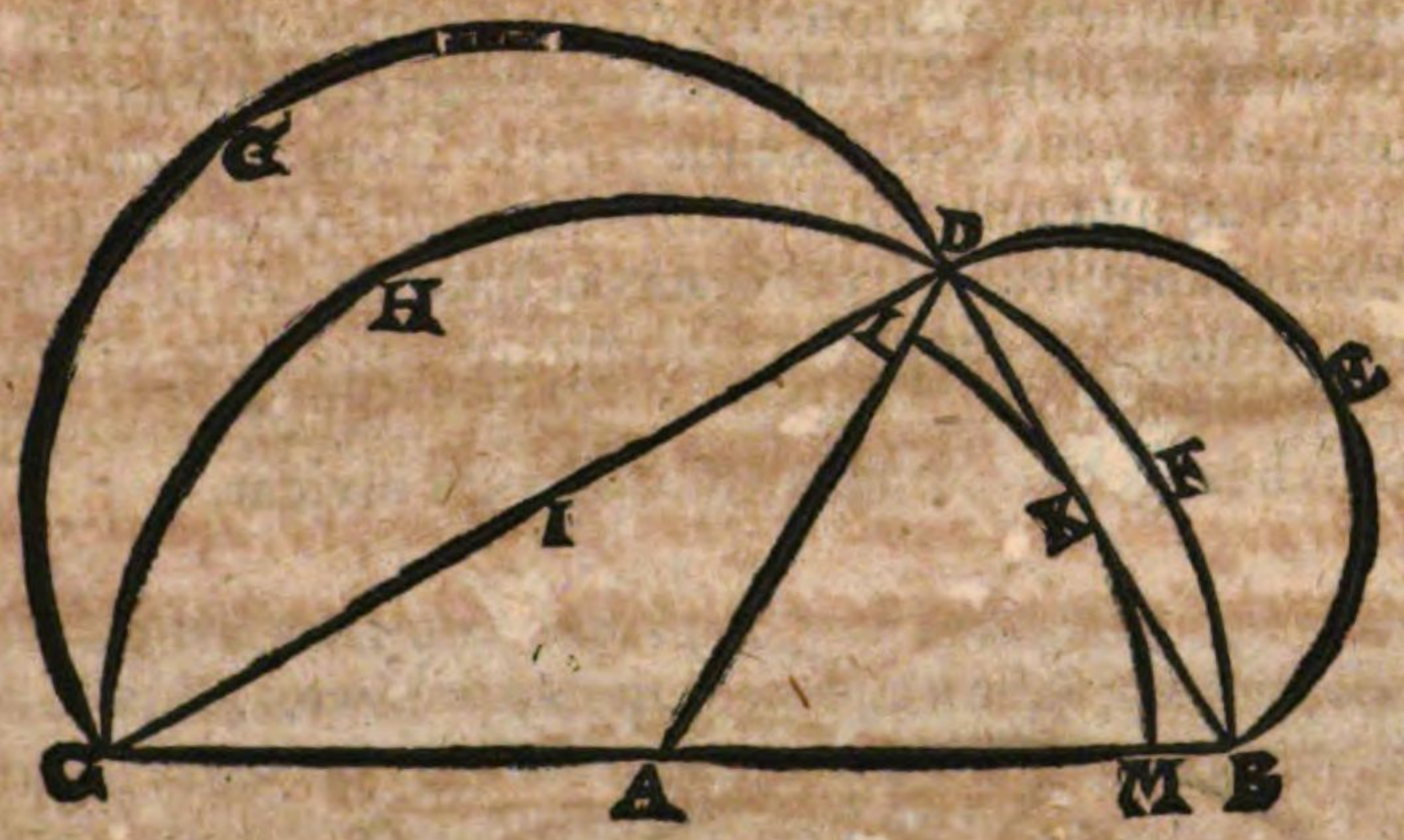
Centro A ſuper Diametro GD deſcribatur Circulus, cui ſexangulus ordinatus inſcribatur BC.DE.FG: ac circumſcribatur idem ſexangulus HI,KL,MN. Dico differentiã inſcripti & circumſcripti hexagoni, nempe ſpacia quæ ſex ſectiones hexagonicas medias, & totidem corniculata continent, æqualia eſſe duabus Lunulis, quippe hexagoni & trigoni ſimul ſumptis. Quum enim ſuperiùs oſtenſum ſit, trapezium HICB (licet inibi in forma trianguli) tertiam partem eſſe trianguli æquilateri BAC: Quare idem trapezium ſexies repetitum conſtituit quantitatem duorum triangulorum æqualium nempe BAC. & CAD. At eandem quantitatem binas illas Lunulas adæquare, etiam ſuprà cognoſcitur. Igitur dictæ differentiæ hexagoni inſcripti & circumſcripti, duæ iſtæ Lunulæ æquantur, quod fuit demonſtrandum.

Prop. 3. hujus.

Prop. 4. hujus.

PROPOSITIO VI.

Differentia inter Lunulam hexagoni & Lunulam trigoni eſt duodecimæ pars Circuli.



Centro A ſuper Diametro BC deſcribatur ſemicirculus principalis BDC. Subtenſis verò ductis ac lunulis hexagoni & trigoni deſcriptis, per ea quæ ſuprà oſtendebantur; Deinde ducto radio AD, inſcribatur è communi centro A, & radio AL æquali ID pars Circuli trigonici ſexta, utputa LAM.

Prop. 4. hujus.

Quum autem Circulus trigonicus ſe ad principalem habeat, ut 3 ad 4; itaq; præmiſſa pars ſexta trigonici LAM continetur quater in ſemicirculo principali BDC. Eſt igitur ſemicirculo BFD æqualis, quum & hic quater in principali BDC contineatur.

Lem: 1. c. 5.

Prop. 4. hujus.

Porrò quia menſura utriusq; Lunulæ intra triangulum Orthogonium BDC comprehenditur, & ipſum bifariam diviſum eſt per AD lineam, adeò ut triangulum ADB æquale ſit triangulo CDA: Quoniam autem LAM ſexta pars Circuli trigonici, & ſemicirculus BFD æquales ſunt, & illa intra triangulum æquilaterum BAD ſubſtat, quare remotâ primò ſectione hexagoni principalis BEDK, ſupereſt Lunula hexagoni BFDE, reſiduæ parti ſectoris trigonici ſextam hujus Circuli partem, nempe LAM complectentis, æqualis. Quæ quidem reſidua pars, quia intra triangulum BAD etiam comprehenditur, proinde

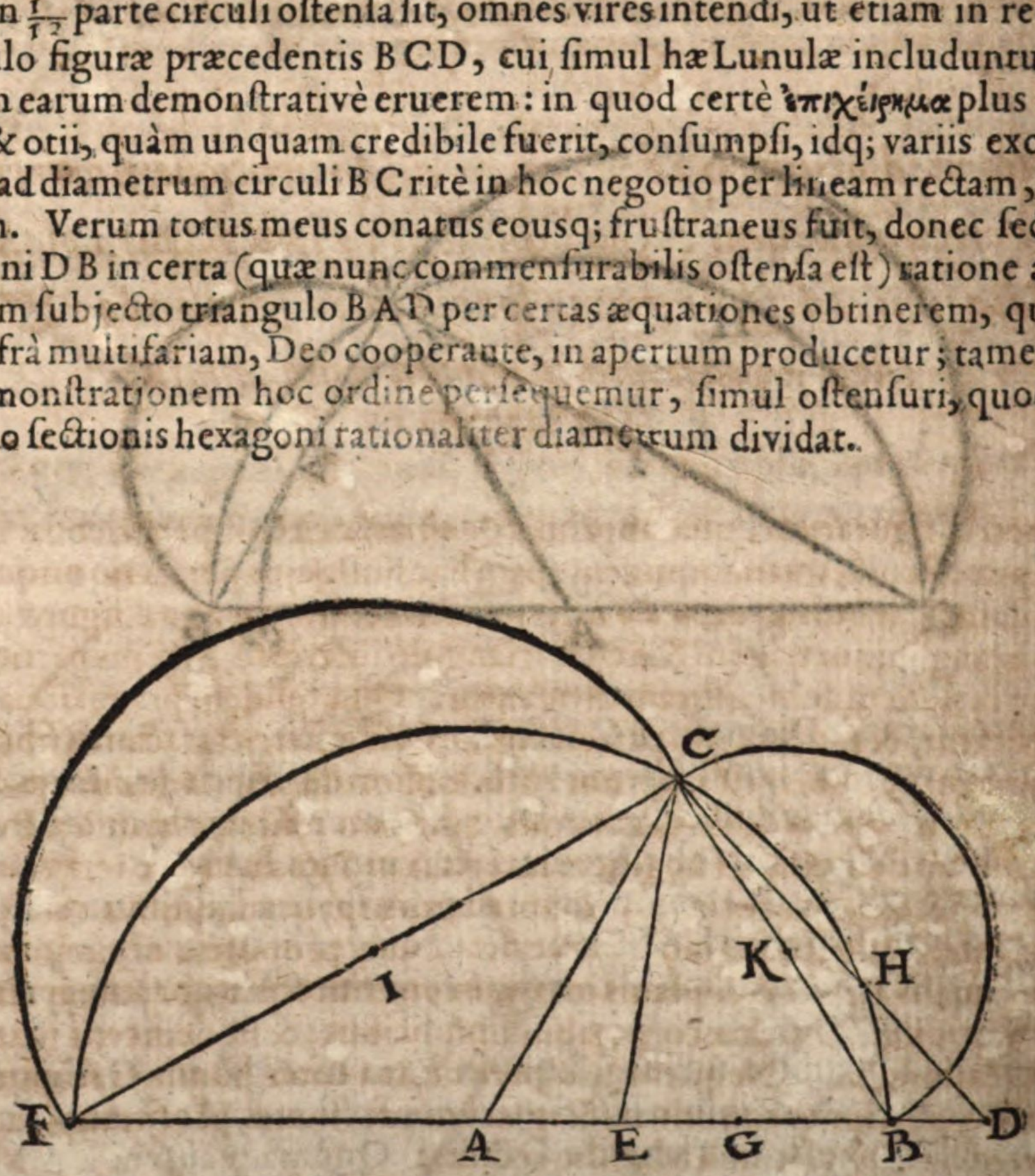
Prop. 1. l. 6.

ab hoc quando simul corniculatum B D L K M abstuleris, dempta sunt de eodem triangulo B A D æquivalentia figuræ B D L M, quæ est $\frac{1}{12}$ semicirculi principalis B D C, eò quod quater contineatur in sectore sexanguli D A B. Tantò igitur minor est lunula hexagoni dimidia parte totius trianguli rectanguli B C D, quippe quod quantitatem utriusq; Lunulæ comprehendit; illud autem duplicatum fit $\frac{1}{6}$ pars semicirculi, & ideò $\frac{1}{12}$ pars circuli principalis, quâ Lunula trigoni Lunulam hexagoni superat, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

Data sectione hexagoni in ratione cum subjecto triangulo à radiis descripto, Lunulas præmissas seorsim in rectilineis triangulis demonstrare, cum differentia earundem.

Quum superiore proxima propositione Lunularum præmissarum differentia in $\frac{1}{12}$ parte circuli ostensa sit, omnes vires intendi, ut etiam in rectilineo triangulo figuræ præcedentis B C D, cui simul hæ Lunulæ includuntur, differentiam earum demonstrativè eruerem: in quod certè ἐπιχείρημα plus & temporis, & otii, quàm unquam credibile fuerit, consumpsi, idq; variis excogitatis mediis ad diametrum circuli B C ritè in hoc negotio per lineam rectam, à D secandam. Verum totus meus conatus eousq; frustraneus fuit, donec sectionem hexagoni D B in certa (quæ nunc commensurabilis ostensa est) ratione ac mensura cum subjecto triangulo B A D per certas æquationes obtinerem, quæ ratio licet infrà multifariam, Deo cooperante, in apertum producetur; tamen & hujus demonstrationem hoc ordine persequemur, simul ostensuri, quod linea à termino sectionis hexagoni rationaliter diametrum dividat.



Super A centro descriptus sit circulus B C F, sitq; ex hypothesi triangulum B C D æquale sectioni hexagoni B C. Deinde divisâ A G dimidia A D in duas partes æquales, nempe A E & E G, & ductâ C E, dico triangulum E B C æquale esse Lunulæ hexagoni propositæ super diametro B C: Et triangulum F E C æquale

æquale esse Lunulæ trigoni super diametro F C, & ideo triangulum A E C dimidium differentiæ harum Lunularum in plano esse, quod æquale est $1\frac{1}{2}$ semicirculi principalis propositi, & tota differentia $\frac{1}{12}$ totius circuli, ut in proxima propositione ostensum est. Quoniam enim triangulum C A D (ex hypothesi) æquale est sectori sextæ partis circuli C A B; ergo hujus quarta parte per trigonum A C B ablatâ, remanet in triangulo E C D octava pars circuli principalis, quippe descripti super diametro B F: à qua demum sublato triangulo B C D sectioni hexagoni B C (per hypothesin) æquali, reliqua est mensura Lunulæ hexagoni in triangulo E C B, & ideo quoq; Lunulæ trigoni in triangulo F C E, quæ erant ostendenda. *Prop. 6. hujus.* *Prop. 1. c. 4.*

Ceterum quum A D longitudine commensurabilis sit A B: Sequitur quod ejus quarta pars, utputa A E, etiam sit A B radio longitudine commensurabilis, & ideò Diameter circuli F B rationaliter à linea C E secta. *Prop. 1. c. 6.*

CAP. VII.

Indicatio mediorum, quæ præterea ad inventionem veri tetragonismi circuli faciunt: Quæ quidem in ipsa natura plani fundata sunt, ad ipsius varia spacia inter se liganda: & ideò æquationibus eorum ante omnia inserviunt.

SYmmetriâ figurarum, quæ inprimis *Quadraturæ* circuli perficiendæ inserviunt, præostensâ, quandoquidem absq; hac nulla ejus perfectio unquam exspectari datur; sequitur de *mediis* ulterior deliberatio, per quæ figuræ diversæ ut sectio hexagoni aut trigoni &c. cum triangulo inscripto, aut ejus partibus &c. in certam rationem ac mensuram dirigantur. Quæ quidem pragmateia *æquatio* a nobis vocatur, & potissimam partem hujus Cyclometrici tractatus sibi vendicat. Et quia turpe nobis erit veterum Philosophorum placita de hisce *mediis* præterire, inprimis *Platonem* de illis audiamus, qui suam philosophiam ex Pythagorea potissimum desumsit. Hic autem inter alia in Timæo suo de terræ natura & stabilitate differens, ad continuas proportiones provocat, quibus certissimum est omnia inter se ligari, sed modis diversis. Nam proportio minimorum terminorum qualis trium est, planis maximè congruit; quatuor autem terminorum proportiones continuæ corporibus simplicibus: & sic deinceps juxta compositionis rationem. Neq; enim *Algebra* divina inter homines scientia aliud quam has proportiones continuas, & ipsarum affectiones profitetur, ac docet. *Platonis* verba hæc sunt latinè à Marsilio reddita:

Quod si universi corpus latitudinem habere debuisset, nullam verò profunditatem, unum sanè tum ad seipsum, tum ad extrema vincienda interjectum medium fuisset. Hæc *Plato*: quasi dicere vellet; unum medium proportionale inter binos extremos terminos plana inter se ligat; Corpora verò bina media inter duo extrema per eandem rationem continuata. *Plato in Timæo.*

O felicem philoſophiam à diſciplinis Mathematicis inſigniter adjutam, qualem Pythagoream olim fuiſſe hêic & alibi in monimentis Platonis ſatis apparet. Nec dubium eſt *Virgilium* ad hoſce proportionum terminos reſpexiſſe; hac ſua exclamatione:

Lib. 1. Ænei.

O terq́; quaterq́; beati
Quêis ante ora patrum, Trojæ ſub mœnibus altis Contigit oppetere!

Solis enim numeris proportio primario debetur, ſecundariò reliquis in natura rebus in univerſum. Quinetiam celeberrimus *Vieta*, non dubitavit has proportiones continuas κύρια omnis *æquationis* appellare his verbis:

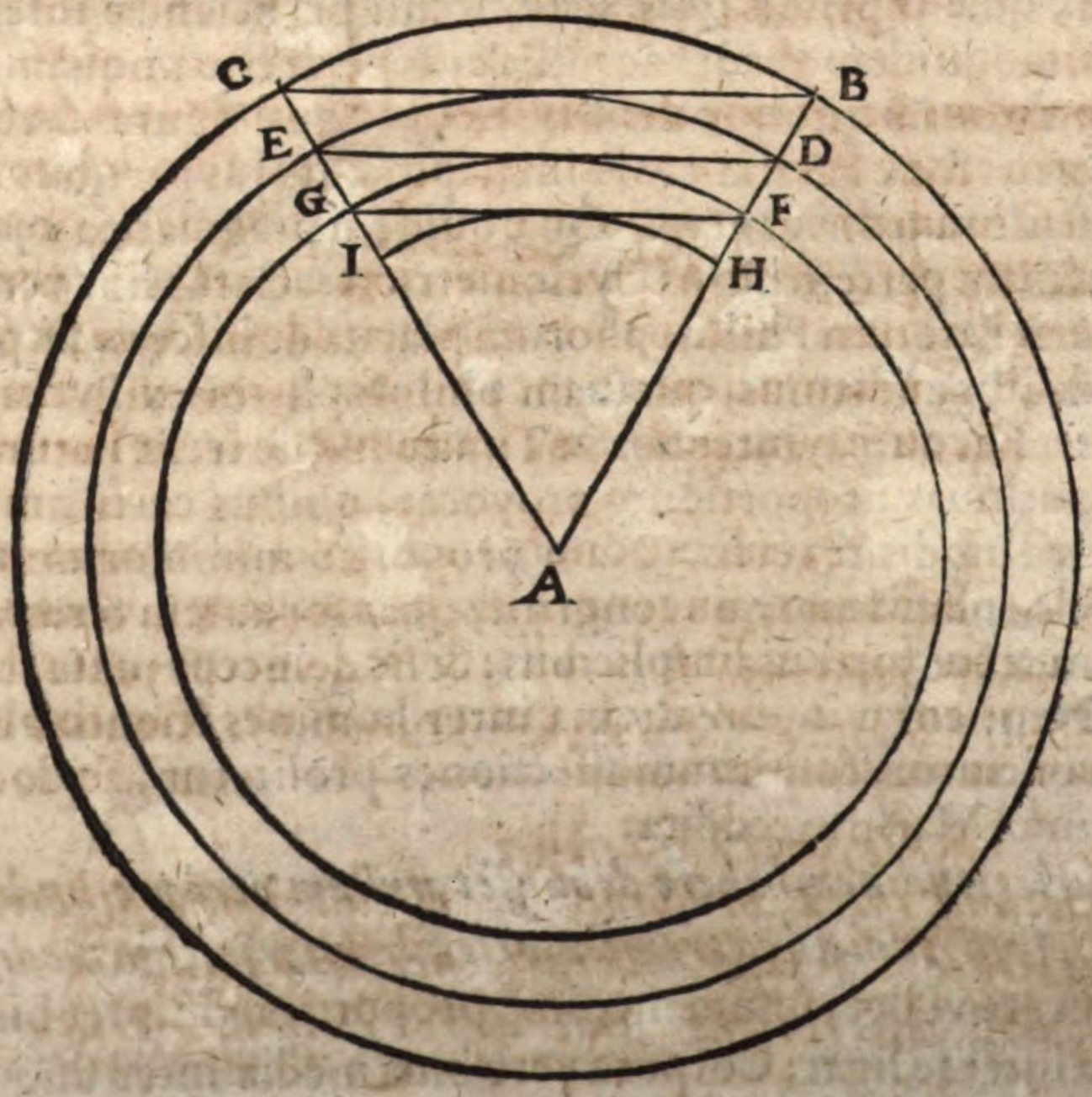
Vieta cap. 2. Iſagoges in artem Analyt:

Κύριον *æqualitatum & proportionum ſymbolum eſt; ſi fuerint tres quatuorque magnitudines. Quod autem ſit ſub extremis terminis, æquale eſt ei quod à medio vel mediis &c.*

Eſt igitur proportio continua trium terminorum ipſum medium, quo natura inprimis delectatur circa plana inter ſe devincienda, tam penes Circulum quàm rectilineum, ut mox in ſequentibus propoſitionibus generaliter demonſtraturi ſumus, idq; per hoc caput, antequam ad ipſas *æquationes* pro *tetragoniſmo* ulterius progreſsi fuerimus.

PROPOSITIO I.

Circuli tres, aut quotquot fuerint, ex communi angulo à centro ordine inſcripti, ita ut Circulus inferior ſubtenſam ſuperioris proximi tangat, inter ſe ſunt in continua proportione; in qua quoq́; ad invicem ſunt omnes partes ſimiles dictorum Circulorum; Similiter etiam magnitudines ſimiles, iisdem quoquo modo adſcriptæ.



Defin. 1. l. 4.

Centro A deſcribatur Circulus extremus BC, & aſſumpto angulo à centro BAC, ductaquè ſubtenſa BC ſuper eodem centro A inſcribatur Circulus alius (qui medius appellari poteſt, ſi tres duntaxat Circuli deſcribantur) tãgens BC, nempe DE, ſimiliter quoq; minimus FG tangens ſubtẽſam medii DE; cui etiam ſubtenſa ducatur FG. Et ſic porrò verſus centrum A Circuli ordine

dine ex communi angulo inſcribantur, quotquot lubuerit: Dico, quòd hi Circuli omnes in continua ſint ad invicem proportione; Exemplum in ternis propoſitis ſufficiet. Primum enim eſt, ut planum Circuli infimi F G, ad planum Circuli medii D E: Sic planum ejusdem medii D E ad planum Circuli extimi B C. Etenim eſto, quod Circulus infimus F G ad Circulum medium D E non habeat rationem, quæ huic medio D E eſt ad extimum B C; tunc neq; ut Circulus D E ſub Circulo B C ordine inſcribitur; ſic Circulus infimus F G ſub Circulo medio D E inſcriberetur; ſed potius ordine interrupto ſeorſim ad intervallum aliquod ſub hoc deſcriberetur, quod contra hypotheſin eſt; Deinde quia Circuli hi continuo in eadem ad invicem ratione ſunt, etiam efficitur, quod in continua ſint ad invicem proportione. Nec alia apodixi opus eſt, ſi plures Circuli ordine inſcribantur, ex quocunq; angulo communi à centro: Omnes enim quotquot fuerint in continua proportione ad invicem ſubſtant, & ideo eandem inter ſe rationem ſervantes; quod primo loco demonſtraſſe oportuit; quodquè antehac à nemine quod ſciam, demonſtratum fuit.

Vide Lem: 1. cap. 5.

Porro quod partes ſimiles horum Circulorum in eadem ad invicem ſint ratione, quâ toti Circuli, Pappus Alexandrinus demonſtrat; imo etiam Logica communiter docet. Quoniam enim partes integrales conſtituunt totum; igitur ſi plura integra ſimilia fuerint, quæ certam proportionem inter ſe habent, neceſſe eſt, partes horum ſimiles numeroq; pares eandem inter ſe proportionem ſervare, quam tota inter ſeſe. Sunt proinde hêic triangula B A C, D A E, F A G, item ſectiones B C, D E, F G. Quin etiam corniculatæ figuræ nempe B D E C. D F G E. F H I G, & in univerſum omnes figuræ horum Circulorum ſimiles in eadem ad invicem ratione, qua Circuli ipſi. Quod ultimò erat oſtendendum.

Prop. 13. l. 5. Collect: Mathem:

Corollaria.

1. Circuli bini proximi ſic ordine deſcripti eandem inter ſe rationem habent, quam radii alterni inter ſe aliavè homologa deſcriptorum latera: ut hêic Circulus extremus B C eandem habet rationem cum proximo D E, quæ eſt radii A B ad radium A F: & ſic porrò: Item B C circulus eandem rationem habet ad proximum Circulum D E, quam ſubtenſa B C ad ſubtenſam F G. Itaq; ſi alterni radii Diametri vel ſubtenſæ rationales fuerint, circuli quoq; inter ſe rationales ſeu ſymmetri erunt, quotquot ſic ordine ſcribuntur: & verſa vice, ſi irrationales.

2. Circulis totis juxta imperatam rationem auctis, vel diminutis, partes ipſorum ſimiles ſub eadem ratione augentur vel minuuntur: Et contra. Itaq; quum facile fuerit ceteras figuras circulo adſcribere; eadem igitur facilitate hæ omnes inter ſe augentur minuunturq;, quâ ipſi circuli, quorum analogiæ ad imperatam rationem inſtituuntur.

PROPOSITIO II.

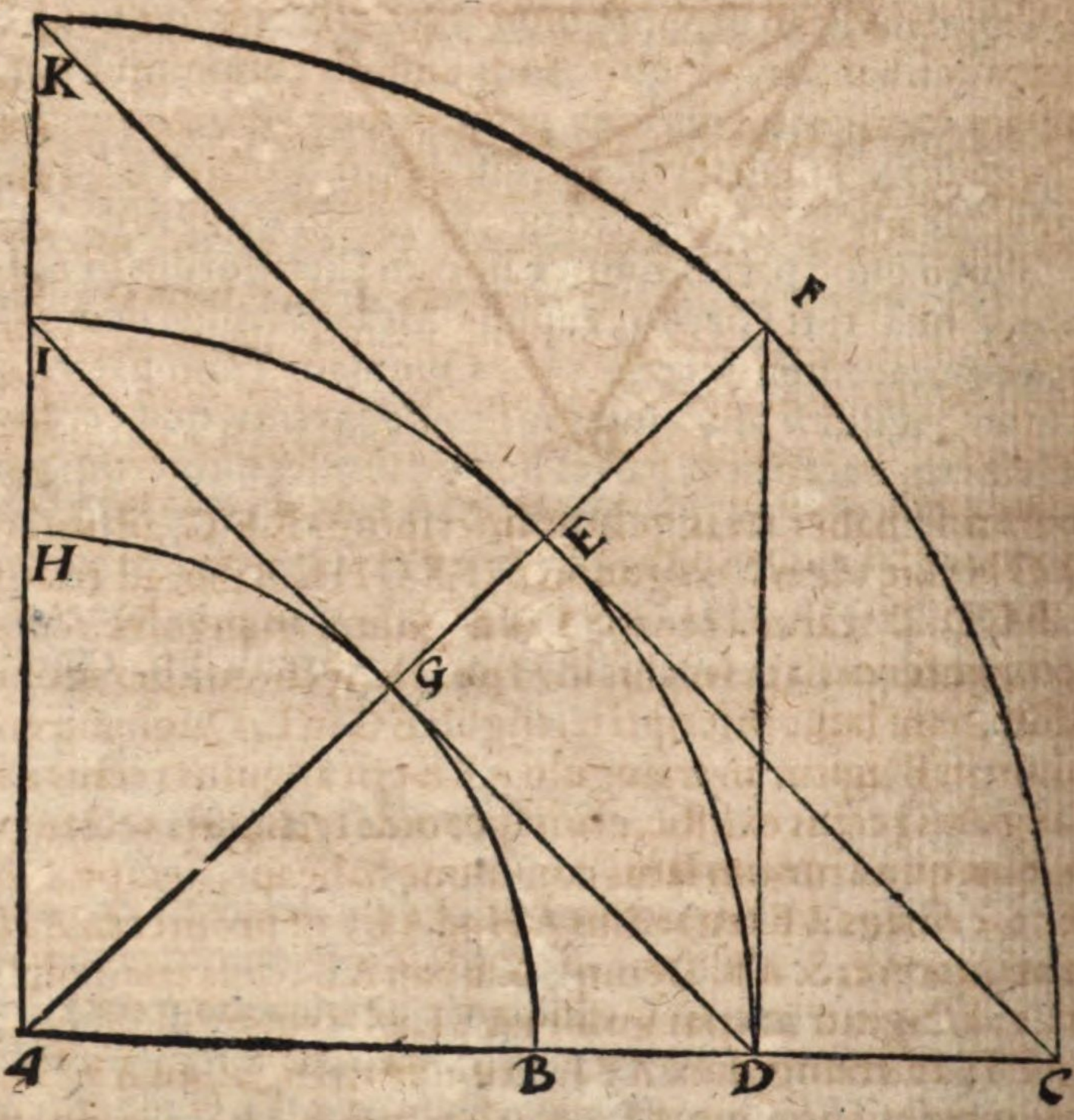
Deſcriptis quomodocunq; intra menſuram ſemicirculi duobus differentibus ſemicirculis ex uno centro, quippe ſuper diverſis conceptis radiis, Circulum medium, qui medii proportionalis rationem inter dictos extremos ſortitur, inſcribere.

Hoc problema præcedentis proxime prop : quasi conversio est, & inventione medii inter datos vel assumptos radios extremorum circulorum nititur : ut in præsenti exemplo assumpta sit linea A C & bifariam in B divisa, ita ut A C dupla sit A B.

Primo igitur describantur peripheriæ ex semidiametris datis A C & A B, quæ sunt C K & B H super communi centro A. Deinde his nempe A C & A B inveniatur mediaproportionalis A D, & scribatur similiter ex A centro distantia A D, peripheria D I, quæ etiam media est inter C K & B H. Ducta autem subtensa C K tanget hunc circulũ medium in E : Ut & D I subtensa circuli medii tanget circulum infimũ B H in G. Dixi autem intra mensurã semicirculi : Etenim si A B subduplam rationem ad A C habuerit, angulus communis ad A quadrans circuli erit, ut hoc loco : Si autem majorem, intra quadrantem manebit: Si deniq; minorem, angulus communis à centro A quadrantem transscendet, ut in aliis exemplis experiri licet.

Prop. 13. l. 6.

Prop. 1. hu. jus.



Ut autem simul cognoscatur arcus dimidius C K, hoc est C F, qui est mensura dimidii anguli ad A, erigatur ex D perpendicularis in F, quæ est sinus rectus anguli C A F, & facilè habetur in relicto numero quadrato post subductionem quadrati radii medii A D, à quadrato radii A F, modò alias termini per numeros dati fuerint.

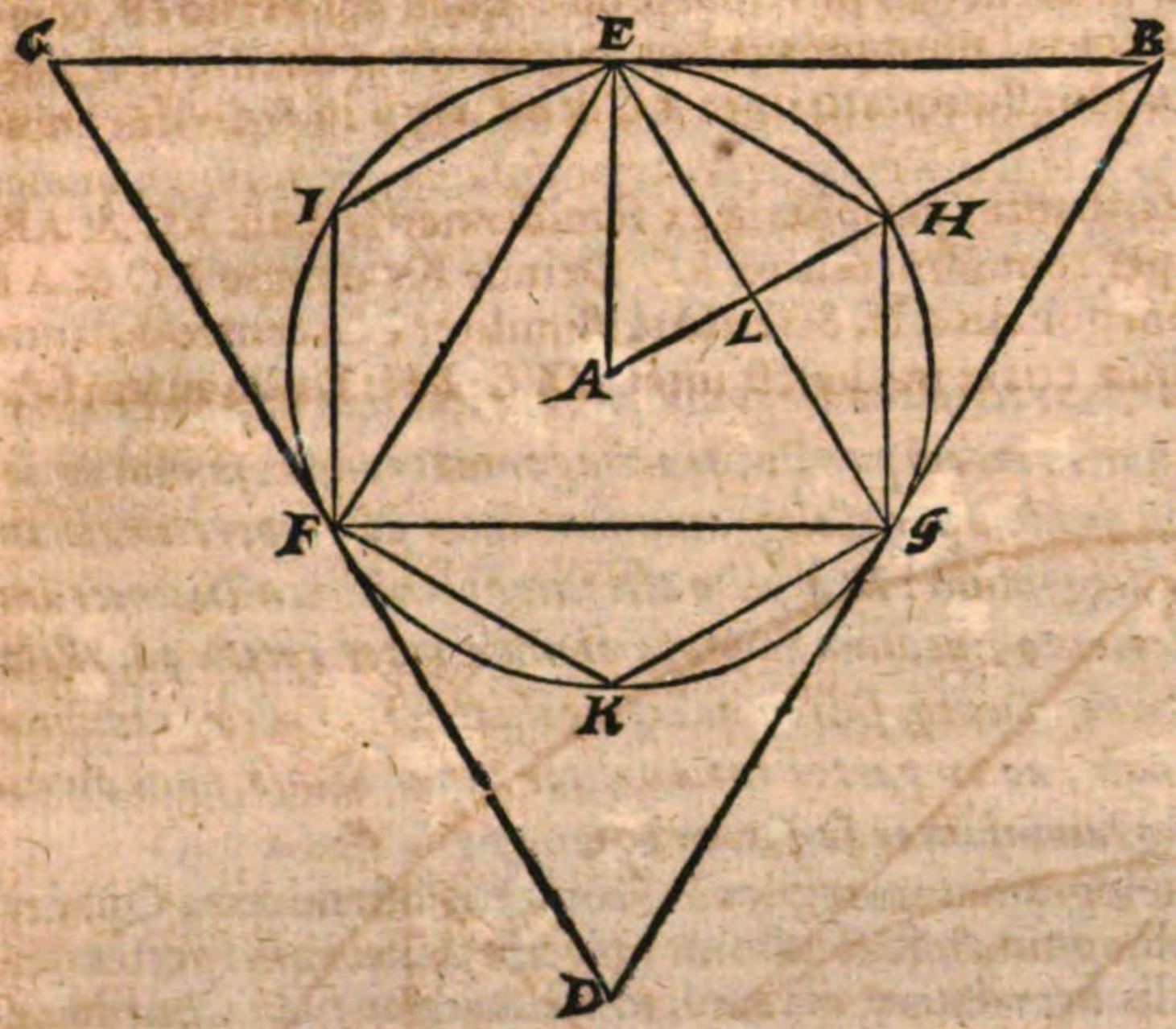
Prop. 47. l. 1.

Similiter modò arcus C K, & per consequens ipsius dimidius C F datus fuerit, cognoscitur hujus sinus rectus D F, modò A D media inter A B & A C simul constiterit.

PROPOSITIO III.

Inter figuram ordinatam similem eidem circulo inscriptam & circumscriptam, si alia duplo laterum numero inscribatur, erit hæc media proportionalis inter inscriptam & circumscriptam.

A centro



A Centro describatur circulus EFG cui triangulũ æquilaterũ EFG inscribatur; Sed circumscribatur triangulum æquilaterũ BCD. Porro inscribatur eidem circulo hexagonon ordinatũ EIFKGH. Hexagonon igitur dictũ quoniam duplo laterum numero est cum triangulo inscripto, & circumscripto: Dico idem hexagonon inscriptum mediũ proportionale esse inter hæc dicta triangula, adeo quidẽ, ut quemadmodum se habet triangulum inscriptum EFG ad inscriptum hexagonon EIFKGH: Sic idem hexagonon EIFKGH se habet ad triangulum circumscriptum BCD. Ducatur à centro A ad angulum trianguli circumscripti B, linea AB quæ circumferentiam secabit in H puncto sectionis hexagoni incipientis, divideтq; bifariam latus inscripti trianguli EG in L. Quoniam enim linea BE tangit circulum in E, igitur in triangulo ABE erit angulus rectus ad E. Similiter ad L quia angulus rectus exsistit, erunt proinde triangula rectangula AEB & ALE similia, quæ quum unum latus commune habeant, nempe AE, erit igitur ut AB ad AE; Sic rursus AE seu radius AH ad AL; ut propterea AH media sit proportionalis inter AL & AB. Deniq; factâ basi AB, quia triangula æquialta se habent ut bases; Est igitur ut triangulum AEL ad triangulum AEH, sic rursus triangulum AEH ad triangulum AEB. Proinde triangulum AEH medium est proportionale inter triangulum AEB & triangulum AEL. Sed triangulum AEH continet sextam partem inscripti hexagoni HEIFKG. Quocirca idem sexies auctum, ut totum compleatur inscriptum hexagonon HEIFKG, erit hoc medium proportionale inter triangulum inscriptũ EFG, & circumscriptum BCD, quod fuit ostendendum.

Prop. 2 & 4 lib. 4.

Defin. 4. l. 4.

Prop. 18. l. 3.

Prop. 1. l. 6.

Eâdem demonstrationis via & facilitas in ceteris est, modò alia exempla hujus propositionis tenori accommodantur.

Corollaria.

1. Si ponatur triangulum hêic inscriptum EFG part: 1, erit circumscriptum BCD part: earundem 4 & ideò hexagonum inscriptum part: 2 in numero rationali, qui in aliis, quod sciam, nuspiam dabitur. *Prop. 3. & 6.*

2. Præterea semihexagonon, quippe quod semicirculo inscribitur, æquale est triangulo inscripto EFG & ideò ipsi rationale, quæ consideratio sequentibus æquationibus quandoq; inservitura est.

Æquale

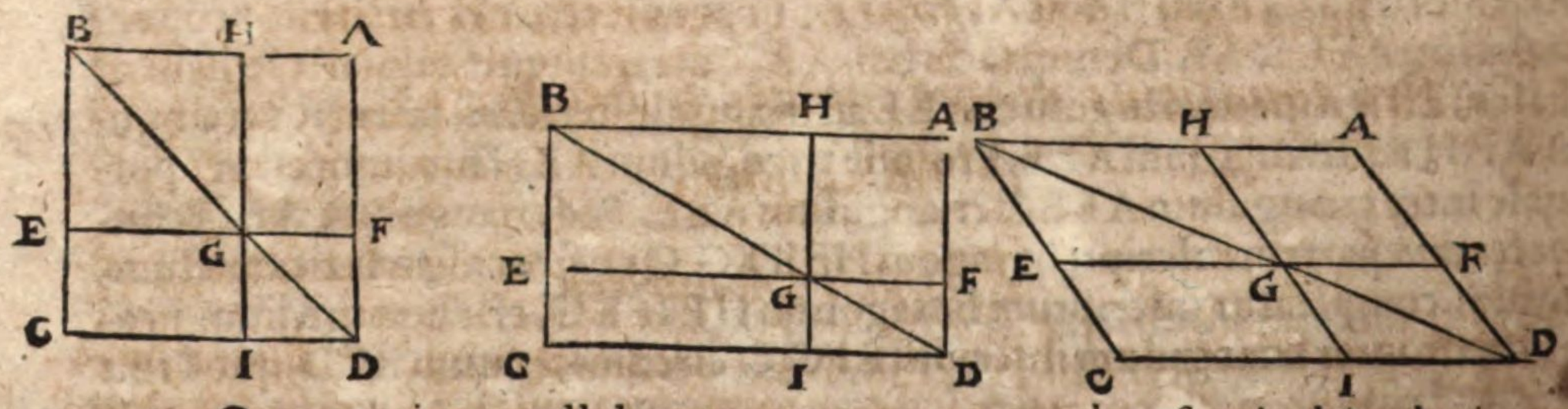
Atqui talis facilitas in Circulis fuit, medium proportionale inter duo extrema inveniendi; Nunc de eodem in rectilineis paucis agam, quantum scilicet præsens institutum postulat, in parallelogrammis duntaxat, & quidem hujus speciebus omnibus, si quidem in has figuras, triangulares, & reliquæ omnes rectilineæ reduci possunt.

PROPOSITIO IV.

Si in parallelogrammo rectilineo diagonius ducatur, ac duæ aliæ lineæ alterni parallelæ lateribus, quæ in eodem puncto, quo diagonius transit, se mutuò secuerint, complementum quodvis parallelogrammi medium sit proportionale inter plana illa, quæ circa diagonium: Et addito alterutro plano circa Diametrum, summa ex hoc & complemento, medium sit proportionale inter totum parallelogrammum ac idem planum. Deniq; facto uno latere duorum parallelogrammum constituentium, rationali, ac in partes rationaliter binas diviso, fiunt omnia spacia propositi parallelogrammi inter se symmetra.

Quoniam parallelogrammum triplex à Geometris ostenditur, Quadratum, Rectangulum oblongum, & Rhomboides, placuit omnes has species oculis exponere, & singulis brevitatis causa easdem notas adponere. Contineantur autem hæc parallelogramma figuris A B C D. Deinde ductâ diagonio B D, singula in duo æqualia spacia dispescantur. Posteà ratione B E & B C, sive B E, & E C agatur linea recta E F parallela lineæ B A, vel C D, quæ ubi intersecuerit diagonium B D in G, ducatur alia H I parallela B E vel A D. Dico, complementum C G vel G A medium esse proportionale inter parallelogramma circa diagonium E A, & I F.

Quadratum. *Rectangulum.* *Rhomboides.*



Quum enim parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, inter se
Prop. 1. l. 6. sint ut bases; Erit igitur primum ut B E ad E C, sic parallelogrammum H E ad pa-
Prop. 43. l. 1. rallelogrammum G C. Deinde erit ut H G ad G I, sic parallelogrammum A G ad parallelogrammum F I. Tertio quia parallelogramma G C & A G sunt æqualia, erit ut parall: H E ad parallelogr: G C, hoc est, A G; ita rursus parallelogr: A G ad parallelogr: F I. Est igitur parallelogr: G C seu A G medium proportionale inter parallelogramma H E & F I, idq; in omnibus tribus parallelogrammi speciebus, quod primo loco ad demonstrandum erat propositum.

Axiom. 2. l. 1 Porrò quum addantur G A & F I, fit A I medium proportionale inter to-
vide Lemma tum A C & F I, vel quum G A addatur H E, fit A E medium proportionale inter
Prop. 54. l. 10 totum A C & H E.

Tertiò

Tertiò si BE rationalis longitudine fuerit EC, hoc est si ambo segmenta lineæ seu lateris BC per numeros fuerint expositæ, erunt quoq; CI ad ID inter se rationales. Est enim ut BE ad EC, sic CI ad ID: Et quoniam parallelogramma æquialta sunt ut bases, erunt quoq; quatuor interna parallelogramma, HE, GC, AG, FI inter se symmetra. Quæ ostendisse oportuit. *Prop. 10. l. 10.* *Prop. 1. l. 6.*

Qua autem ratione discreta quatuor terminorum proportio intra continuam tanquam altera media includi possit, Algebræ opportunè aliquando inferendum video, quum id hactenus, ni fallor, sit omissum. Quinetiam area omnis parallelogrammi media proportionalis est inter binorum laterum idem parallelogrammum constituentium potentias seorsim sumtas. Penes sola autem quadrata hêic comparatio æqualitatis est, ut exempla satis monstrabunt. Ex his præterea, quæ inter στοιχειώσεις Euclideas passim reperiuntur, quibus Geometria continua trium proportione insigniter quidem & maximè in plano locupletata est, quis de Platonis censura pro eodem superius inculcata dubitabit? Et quia natura hac proportione tantopere delectatur, non dubium est, quin ea ad tetragonismum inprimis faciat. *Conclusio de continua trium proportione ad quadraturæ inventionem cum primis conducente.*

Quum autem in superioribus demonstratum sit, *Quadraturam circuli* absolute perfici posse; ad hanc igitur *linea* extremâ & mediâ ratione secta ideo inutilis est, quia segmenta relinquit inter se longitudine irrationalia. Nunc hisce prælibatis ad ipsas æquationes, quibus circulus quadratur, in nomine Domini accedamus. *Prop. 1. c. 5. Admonitio de linea extrema ac media ratione secta.*

CAP. VIII.

Quadratio semicirculi συντόμως, *æquatione inter semicirculos, & hexagoni inscripti semissem, ritè in continua trium proportione ex antecedentibus institutâ, in qua quoq; inter alia Lunulæ hexagoni, toties optatæ, Quadratio cernitur.*

Pro æquationis autem intellectu hæc præmittuntur.

1. *Definit: Æquationis.*

ÆQuatio hoc loco nihil aliud est, quàm debitæ magnitudinis figuræ in circulo propositæ in σχέσει seu comparatione cum aliis diversis simul propositis, secundum proportiones illas, quibus plana in Natura inter se devincta sunt, indagatio.

2. *In quibus hæc consistit Æquatio.*

Æquatio autem, quam hêic adhibemus, tota in planis rectilineis transigitur, & consistit vel in tribus terminis *continuæ proportionis*: Vel *positione* radicis unius, ut in *Algebra* nominatur.

3. *Postulata ad æquationem perficiendam.*

1. Ad *æquationem* perficiendam semper notum aliquod præsupponendum est, quod magnitudini primò & per se inest, quæ in comparationem effertur.

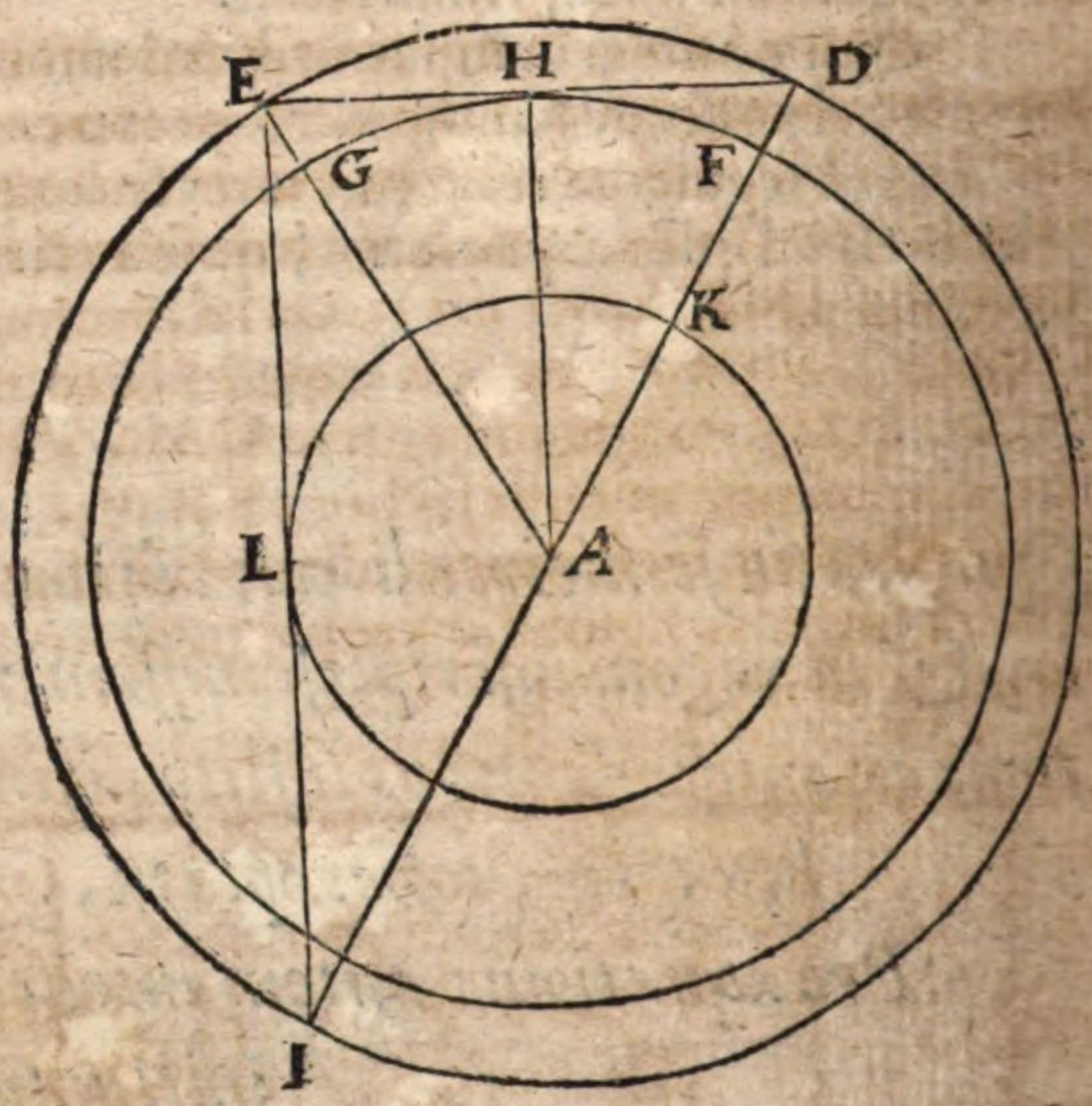
2. Omnis perfecta *æquatio* in comparatione ſymmetrorum conſiſtit; Heic autem in comparatione planorum ſymmetrorum. Ergo poſtulatur in noſtra *æquatione*, ut figuræ inter ſe comparandæ ſymmetræ ſint, quod etiam ex antece-
Cap. præc: dentium demonſtratione obtentum eſt.

Hæc autem cauſa ſine dubio fuit, quod Fr: Vieta in *æquationibus* nulli ſecundus, easdem in ſymmetris duntaxat inſtituerit, veluti opera ipſius revolventi patet.

LEMMA.

Si hexagono inſcripto, aut hujus parti ſextæ circulus inſcribatur, habebit ad ambientem ſeu principalem circulum, cujus inſcripto hexagono inſcribitur, rationem ſubſesquitertiam, & differentia horum circulorum relicta æqualis erit circulo à ſemiradio circuli principalis deſcripto, & hic principalis ſubquadruplus; inſcripti verò ſubtriplus, & ideò $\frac{1}{6}$ hujus eſt $\frac{1}{24}$ circuli principalis.

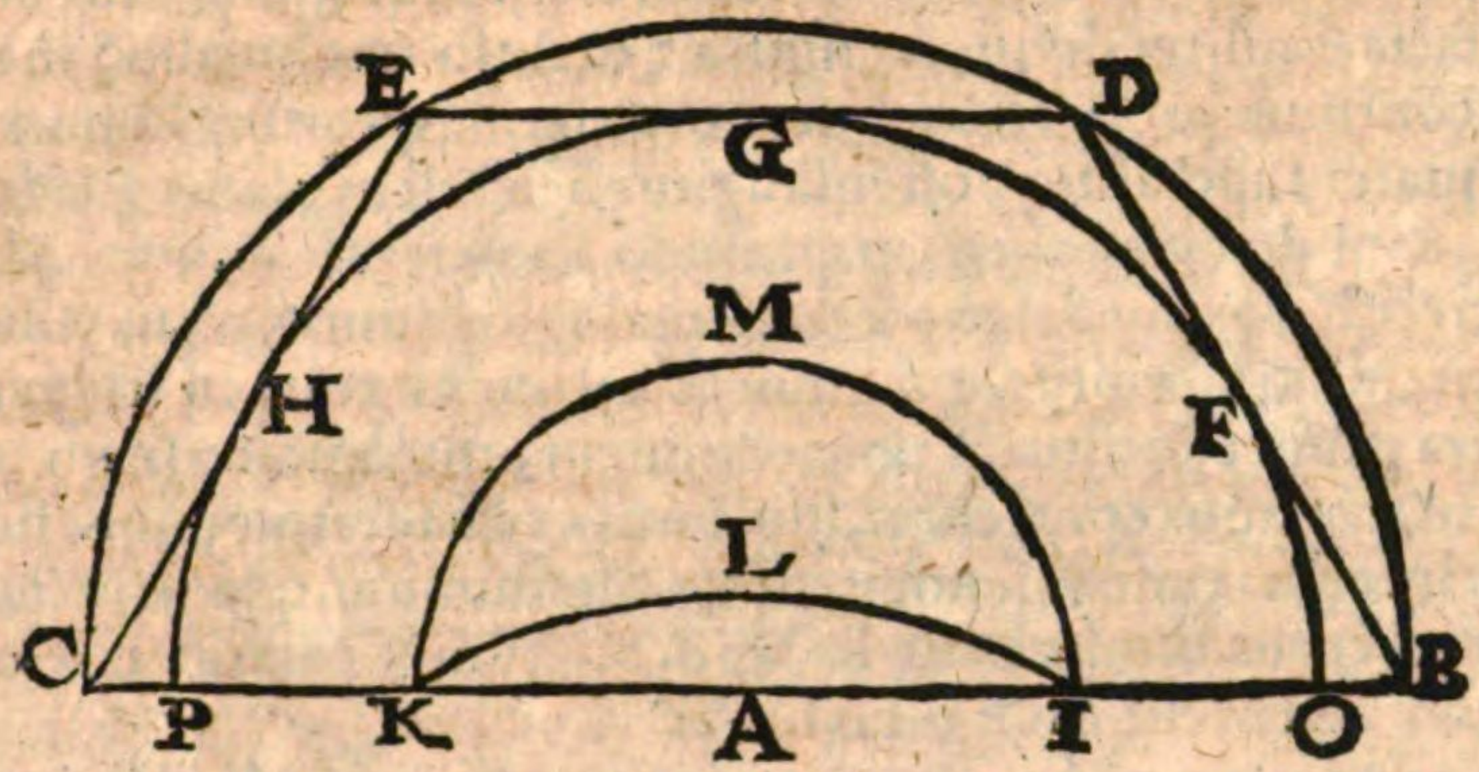
Centro A deſcribatur ſuper radio A D circulus principalis D E, cujus ſextæ parti D A E ſubtenſa eſt D E æqualis radio A D;
Defin. 5. l. 4. & inſcribatur circulus F G cujus radius eſt A B æqualis L E ſemilateri trianguli æquilateri circulo principali inſcripti, cujus igitur latus eſt I E. Deniq; ſuper ſemiradio principalis deſcribatur tertius circulus K L. Dico, circulum inſcriptum F G ſubſesquitertiam rationem habere, cum principali D E: Differentiam autem horum contineri in circulo minimo K L, qui ſubquadruplus principalis eſt, ſubtriplus verò inſcri-
Prop. 2. l. 12. pti. Quoniam enim circuli ſunt
Prop. 31. l. 3. in duplicata ratione ſuarum diametrorum, & trianguli I E D angulus ad E in ſemicirculo rectus eſt; ideò quando aſſumitur I D diameter circuli principalis 2 part: erit ejus quadratum 4. Quadratum verò D E. 1. & denique ſubducto quadrato D E à Quadrato I E. 3. Hæc autem quadrata quia in duplicata ratione diametrorum ſunt expoſitorum
Vide Lem: 1. cap. 5. circulorum, igitur ipſas rationes eorundem ad invicem exhibent; Eſt igitur circulus inſcriptus ad principalem ut 3 ad 4, hoc eſt, in ratione ſubſesquitertia, & ideò differentia 1. æqualis circulo minimo, qui quoq; ſubquadruplus eſt ad circulum principalem, ſed ad inſcriptum ſubtriplus; quæ erant ad demonſtrandum propoſita.



PROPOSITIO I.

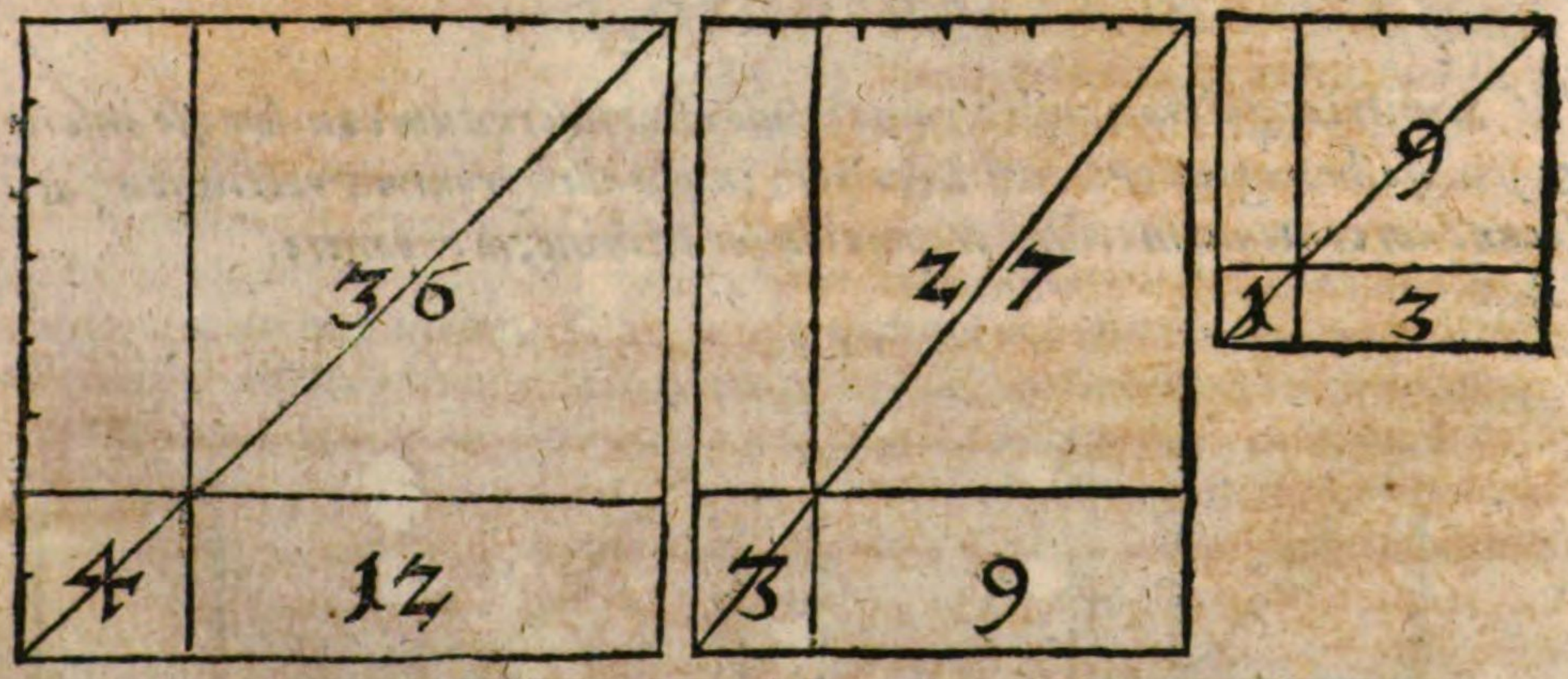
Tres ſemicirculos cum Lunula hexagoni, deſcribere, & intra figuras tres

tres continuas proportiones includentes, eosdem semicirculos ad invicem parallelogrammis rectilineis juxta Analogiam cujusq; mensurare.



Centro A describatur semicirculus B D E C, cui beneficio radii A B inscribatur semihexagonon B D E C: & postea huic inscribatur semicirculus secundus O F G H P, qui ad primum rationem habet subsesquitertiam, seu quæ est 3 ad 4. Hinc facto A I (quæ linea semissis est A B) radio, & super eo descripto semicirculo I M K, habet ille etiam ad primum rationem, quæ est numeri 1 ad 4. Et quum ducatur arcus I L K æqualis & conformis arcui B D, fit figura I M K L Lunula hexagoni; figura autem I L K A sectio hexagoni principali circulo inscripti nimirum æqualis sectioni B D &c. *Lem: præc:*

Hi autem tres semicirculi in planis figuris ita repræsentabuntur, ut singuli intra singulas figuras è proportione trium continua collecti, in analogica mensura ad invicem appareant.



Describantur enim pro semicirculo minimo I M K, & maximo B D E C duo quadrata, quorum prioris latus subduplum est lateris maximi, & quoniam magnitudine horum circulorũ ad invicem primo inest, ut minor à maximo quater superetur, diviso itaq; latere minoris quadrati in quatuor æquales partes, post ductã *Postul: 1 hujus,*

Prop 4 c.7. diagonium, ſumatur pars una, ac facta, juxta præmiſſa, figuræ diviſione, inveniuntur tria plana in continua proportione nempe 1.3.9. quæ (uno medio excluſo) ſummam conſtituunt 13. Similiter latere quadrati pro maximo ſemicirculo in octo partes æquales diviſo, poſt actam diagonium, ſumantur binæ partes iſtarum, ac facta ſimiliter diviſione figuræ (excluſo uno medio) inveniuntur tria plana in continua proportione, utputa 4.12.36. quorum ſumma eſt 52, & quia 13 à 52 quater ſuperantur, oſtenſa igitur hêic eſt in planis quadratis juxta trium continuam proportionem magnitudo ſemicirculi minimi ad magnitudinem ſemicirculi maximi deſcriptorum analogicè duntaxat, ut volumus. Ut autem ſemicirculus inſcriptus, qui numero ſecundus erat, in iisdem partibus ſimiliter juxta trium continuam proportionem, analogicam ſuam menſuram

Lem: hujus. cum præmiſsis in plano repræſentet, ſumamus ex quadrato majore ſuperiorum differentiam inter maximum ſemicirculum & minimum, quæ in rectangulo oblongo apparet, cujus unum latus habet 6, alterum 8 partes: tale oblongum medium locum inter reliquas figuras habet.

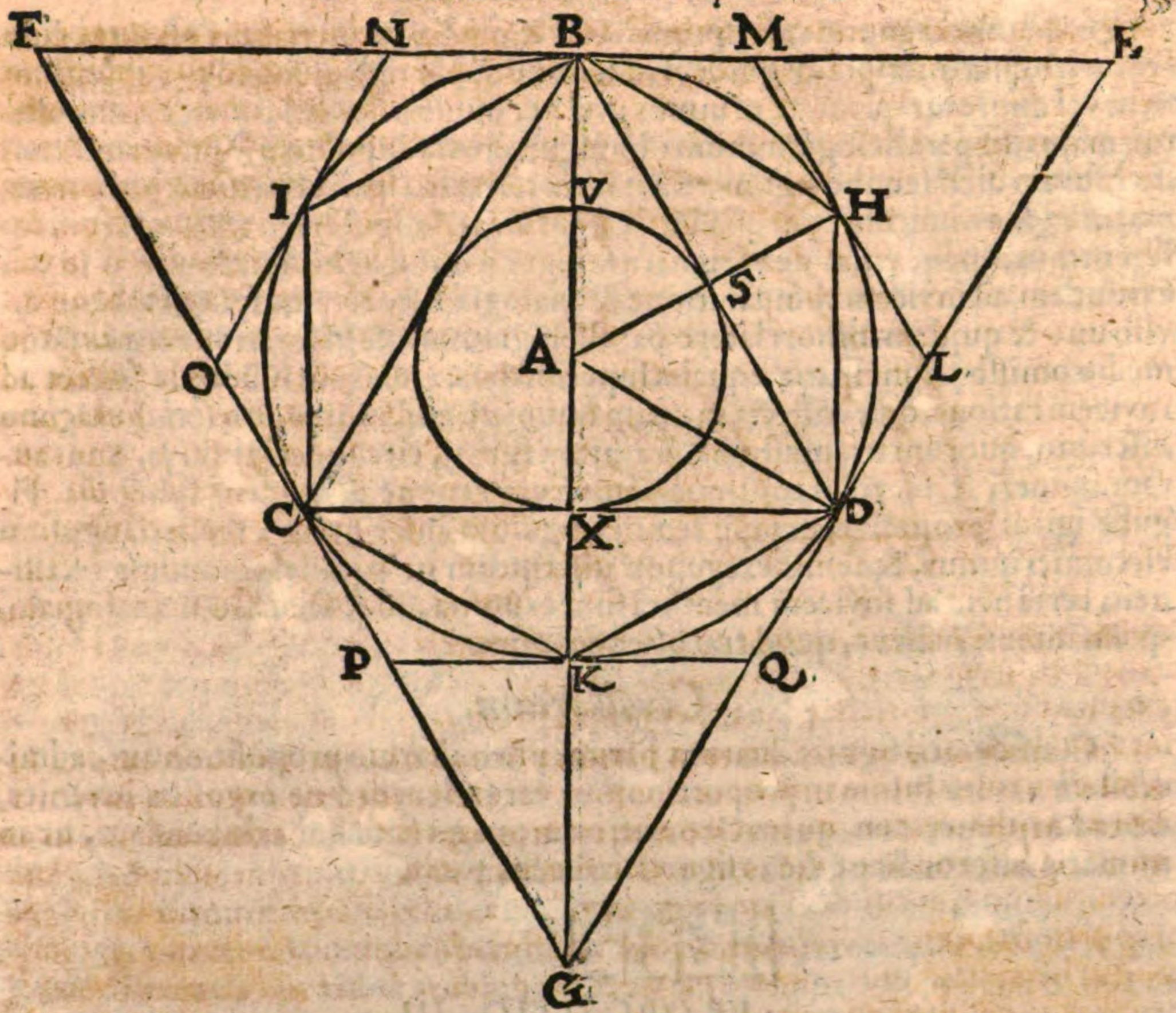
Deinde dividatur minus latus pro ratione ſemicirculi inſcripti ad mini-

Prop. 4. c. 7. mum, utputa tripla, & ideò in $4\frac{1}{7}$ & $1\frac{1}{7}$ partes æquales; & diviſa figura tota (poſt ductam diagonium ejus) ſecundum eandem rationem inveniuntur quidem (excluſo uno medio) tria plana in continua proportione ac partibus cum prioribus æqualibus, ſcilicet 3.9.27. quæ plana collecta efficiunt ſummam 39. quæ ſe habet ad menſuram maximi circuli 52 part: ut 3 ad 4, & ad minimum 13, ut 3 ad 1 per omnia, ut in ſuperiore lemmate hæ magnitudines ad invicem erant oſtenſæ. Semicirculi igitur hi tres in plano ad invicem ita comparati ſunt, ut inibi quoq; magnitudinum eorundem analogia ſit oſtenſa, idq; juxta trium continuam proportionem, ejus collectionem, &, quod fortaſſe admirationem aliquam merebitur hêic, inſcriptus numero partium per gradus à radice ad cubum aſſcendit, prout naturæ luſus permittat.

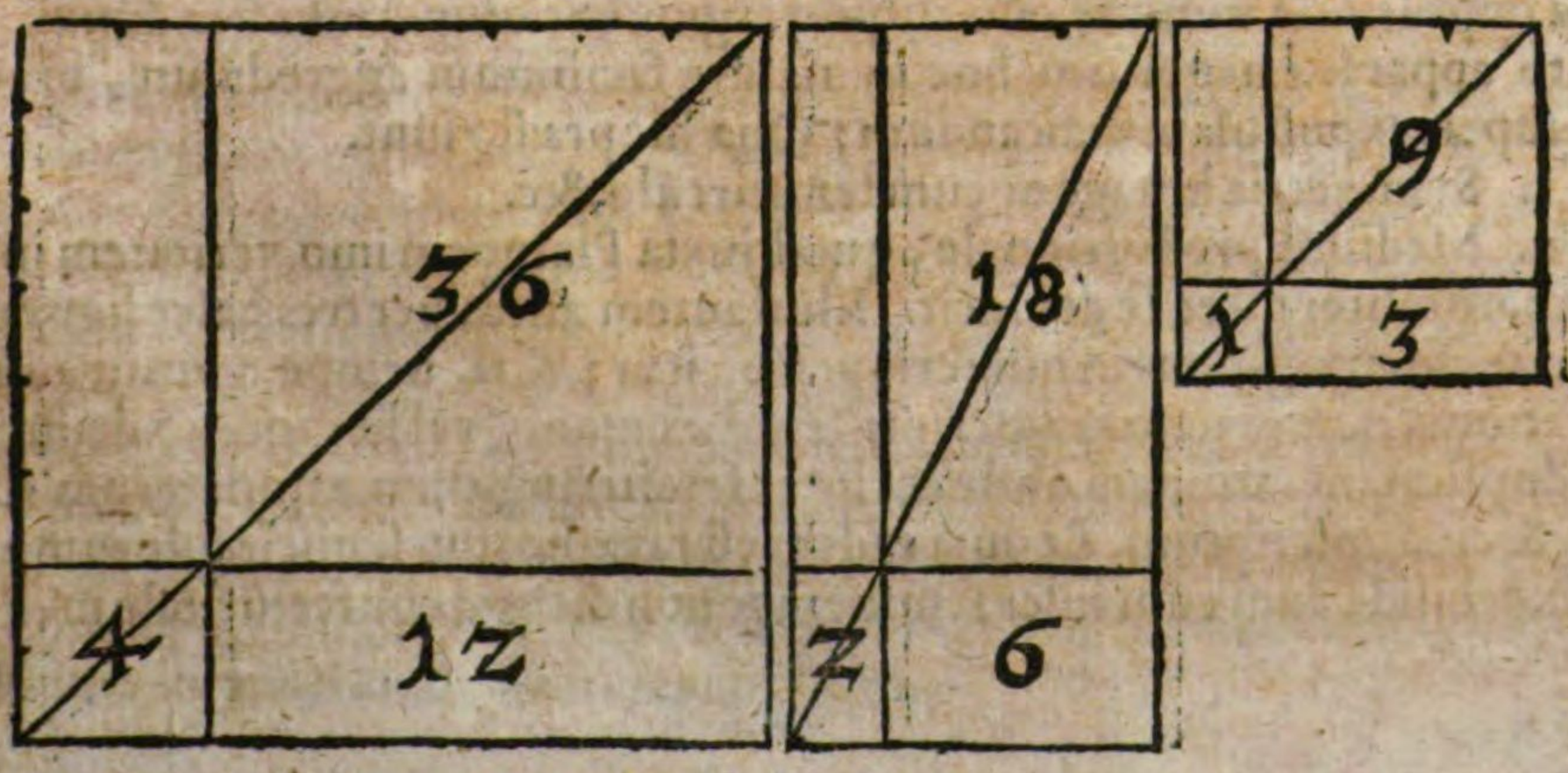
PROPOSITO II.

Semitriangulum æquilaterum circulo circumſcriptum cum ſemiſſe inſcripti, & ſemiſſe hexagoni ordinati inſcripti, in parallelogrammis rectilineis pariter ſecundum continuam trium proportionem ad invicem exponere.

Revoce-



Revocetur huc figura propoſit: III. capite VI. & ſumatur ea in ſui ſemiſſe, nempe B G E; intra quem ſemitriangulum æquilaterum circumſcriptum eſt B G E; inſcriptum X B D; ſemihexagonon deniq; B H D K, è centro A. Porro quemadmodum Lem: hujus oſtenſum eſt, ſemicirculum nimirum internum X S V ſubquadruplum eſſe ſemicirculi principalis K D H B, ſic ſuperius paritur ſemitriangulum inſcriptum X D B ſubquadruplum eſſe ſemitrianguli circumſcripti B G E. Quadrata igitur & ipſorum ſpatia terna cõtinuæ proportionis, quæ ſuperius binis circulis analogicè competebant, ſimiliter ſemitriangulis hiſce binis ad invicẽ comparandis omninò cõveniunt. Hiſce igitur & hoc loco expoſitis; *Prop. 3. c. 6.*



Quia ſemihexagonon inſcriptum BHDK mediæ proportionis eſt inter dicta ſemitriangula inſcripta, & quidem in ratione dupla; igitur modo per appoſitionem vel duplétur quadratum minus; vel per diminutionem, ut vides, dimidietur majus, fit parallelogrammum oblongum, juxta appoſitam figuram indicans menſuram dicti ſemihexagoni, etiam intra terna ſua ſpatia continuæ proportionis, in σχέσει nimirum cum quadratis menſuras triangulorum adſcriptorum referentibus, (neq; enim de veris harum figurarum magnitudinibus niſi in tali earundem ad invicem comparatione & analogia hêic erimus ſolliciti) Nam diviſo uno & quidem minori latere parallelogrammi, & hêic ratione tripla (uno medio omiſſo) fiunt ſpatia æqualia ſuperioribus. 2. 6. 18. in ſubdupla ſcilicet ad invicem ratione, quæ collecta in unam ſummam efficiunt 26. pro ſemihexagono inſcripto, quorum triangulum inſcriptum fuit 13, circumſcriptum 52. Sunt autem numeri 13. 26. 52. in continua ad invicem ratione & quidem ſubdupla. Figuræ igitur propoſitæ, nempe ſemitriangulum inſcriptum, ſemitriangulum circumſcriptum, & ſemihexagonon inſcriptum in parallelogrammis rectilineis, certâ hêic ad invicem menſurâ ſunt expoſita, idq; ſecundum analogiam, quam inter ſe habent, quod erat oſtendendum.

Corollarium.

Conſideratis figuris duarum harum præmiſſarum propoſitionum, admirabilem naturæ luſum in proportionibus earundem ordine expoſitis invenies, tàm ad Arithmeticam, quàm Geometricam progreſsionem exhibendam, ut in numeris hiſce ordine è dictis figuris collectis patet.

9/3/1	18/6/2	27/9/3	36/12/4

PROPOSITIO III.

Magnitudinum ſemihexagoni principali ſemicirculo inſcripti in comparatione cum magnitudine utriusq; nempè minimi circuli, ac principalis ſeu maximi è præmiſſis invenire; item, ſectionem hexagoni ac Lunulam ejuſdem in certis quoq; numeris hinc eruere, adeoq; totum circulum quadrare reſpectu ipſius ſemihexagoni, ſeu, quod idem eſt, trianguli æquilateri inſcripti; aut cujusvis alterius partes circuli ſimiliter in numeris notæ.

Nunc, Deo propitio, rem propius accedamus, dum ſemicirculum ſub æquationem cum ſemihexagono trahamus, & ſic in rectilineum transferamus. Quod impoſsibile minimè eſſe aliquot argumentis ſuperius oſtendimus. Sed quanto apparatu negotium hoc in natura facilimum aggredimur, breviter juxta ſuperius poſtulata indicandum: Quæ hic præſto ſunt.

Cap. 2. Item Prop. 1. cap. 5. & paſſim alibi.

1. Symmetria hexagoni cum ſemicirculo, &c.

Prop. 1. c. 5. Vide princ: cap. 7.

2. Medium proportionale, quod juxta Platonem imo veritatem ipſam, Plana naturaliter inter ſe devincit. Illud autem antea per tres haſce figuras ordine inter ſe comparatas in numeris perſpicitur 3. 6. 12. nempe continua duplicata ratione, quæ ex natura inſcripti ſemihexagoni (vel hexagoni) deducitur, dum duplicatam rationem obtinet, inter ſemitriangulum æquilaterum inſcriptum & circumſcriptum. Et quia eadem eſt ratio horum ſemicirculorum ad invicem, proinde dum cum hiſce ſemihexagonon dictum confertur, tale medium,

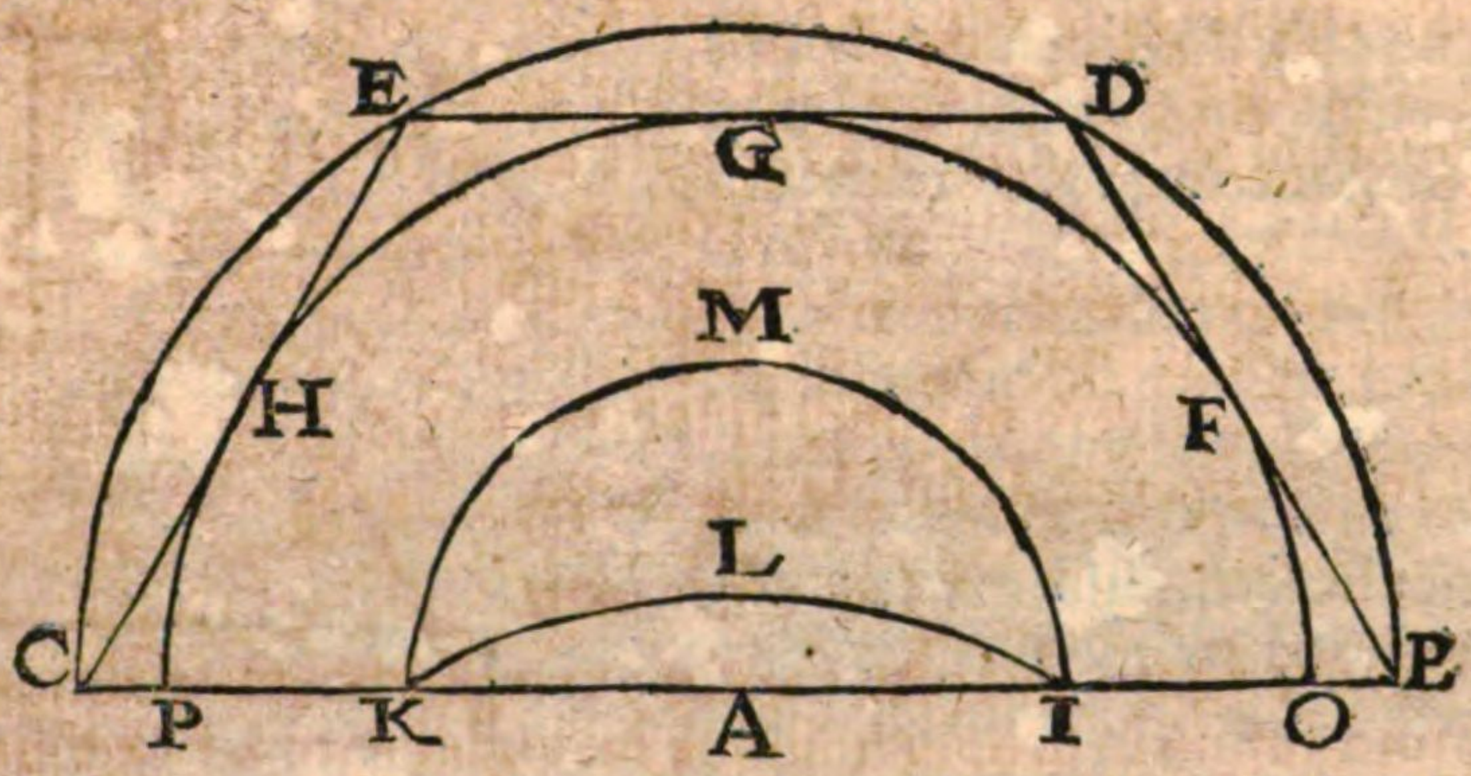
Prop. 1. & 2. hujus.

Prop. 3. c. 7.

quale

quale nunc in numeris inventum & expositum, etiam ex naturæ præscripto ubiq; retinendum est, siquidem formam *comparationis* seu *æquationis* hujus in se continet.

His præmissis repetatur nunc figura primæ propositionis hujus, in qua quia per legitimam & naturalem adhibitam æquationem ostendendum est, quantum semicirculus externus B C superat ipsum semihexagonon inscriptum B D E C; & rursus quantum hoc semicirculum I M K excedit. Quoniam igitur satis hêic apparet, quod dictum semihexagonon semicirculum inscriptum O P pro summa trium corniculatorum antea descriptorum vincat: *Prop. 3. 6.*



Proinde minorem rationem intercedere oportet inter semicirculum hunc extimum B C, & semihexagonon inscriptum B D E C, quàm inter eundem semicirculum extimum B C & inscriptum O P. Quorum rationem antea in numeris certò exposuimus, hunc per 39, illum per 52 mensurando. Semihexagonon igitur plusquàm 39 talium partium in sua magnitudine esse oportet & minus longè quàm 52, quod etiam ad communem hujus rei scientiam pertinet. *Prop. 1. hujus.*

Deinde figura pro hoc semihexagono, dum cum dictis semicirculis hêic comparabitur, quia vix mediatè ex ullo quadrato nasci poterit, ut illæ superiores oblongæ rectangulares, quandoquidem plana non ejusdem ut illic; sed diversæ speciei (ut circulare & rectilineum) hêic in comparationem veniunt; Quocirca ipsam quoq; figuram, pro dicto semihexagono, quadratum potius fore natura monet: Quod ita dividetur, dum tria etiam in eo continuæ proportionis spacia quærimus, ut medium habeat numerum 6, velut antea ostensum est.

His aliisvè, quæ harum trium figurarum comparationem sequuntur, in considerationem assumtis, statim natura ipsa suggerit, nullum aliud quadratum pro semihexagono repræsentando in symmetria, ut decet, cum dictorum circulorum mensuris inveniri posse, quàm cujus latus ad numerum septenarium exsurgit. Etenim eodem rationaliter diviso, quippe in 6 & 1, omnia præmissa includit, quæ ex ipsa indole planorum inter se ligandorum proficiscuntur. Talis enim lateris potentia est 49; Et diviso, ut dictum est, quadrato isto, atq; uno, ut fit, medio abjecto, proveniunt spatia reliqua in continua proportione hoc ordine. 1. 6. 36. Quæ collecta efficiunt in una summa, 43. Quo numero hexagonon in comparationem cum semicirculis propositis juxta ipsius naturæ exigentiam in continuis proportionibus ostenditur. Sed nunc ipsa quadrata tribus hisce magnitudinibus competentia cum debitis suis distinctionibus & numeris subjiciemus, primò seorsim, deinde conjunctim, posteà, quæ harmonia in ipsis pro eo, quod intendimus, fuerit, ulterius exposituri.

EXPO-

EXPOSITIO.

Spacia tria interna trium ſingulorum horum quadratorum, quæ quidem ſpatia in ſuis numeris, unitatis reſpectu paria ſunt, quando pro æquatione ſemihexagoni inſcripti cum duobus ſemicirculis ab initio propoſitis, κατὰ σύνθεσιν colliguntur, proveniunt pro

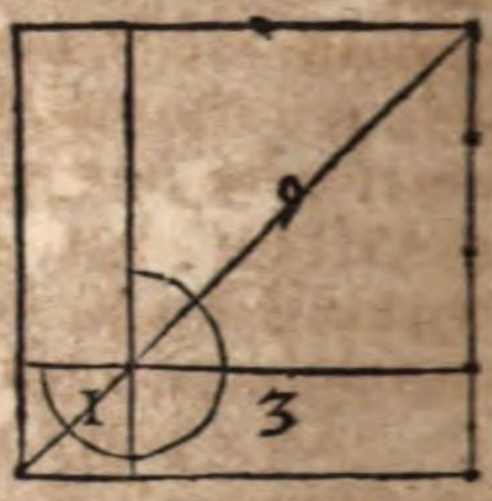
Minimo ſemicirculo. 13.
Semihexagono. 43. } in analogia ad invicem.
Semicirculo maximo. 52.

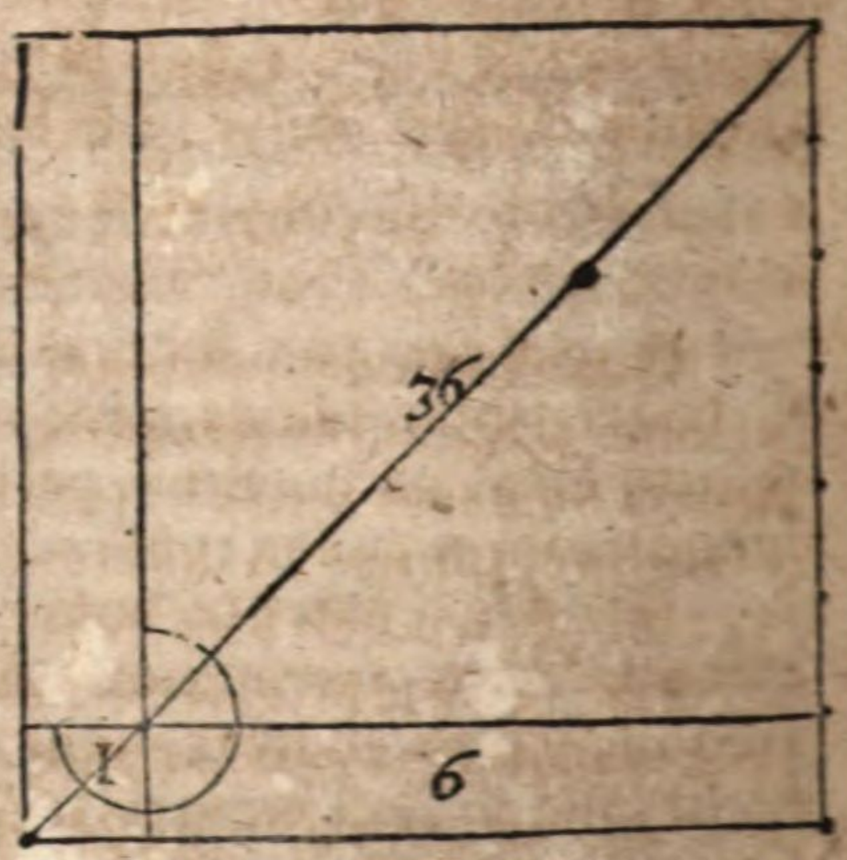
Quæ quoq; diviſa hanc σχέσιν ad invicem ſervant ut & poſtea in uno quadrato conjunctim; velut hêic videre eſt:

Semicirculus minimus 1. 3. 9.
Semihexagonon inſcrip. 1. 6. 36.
Semicirculus maximus; 4. 12. 36.

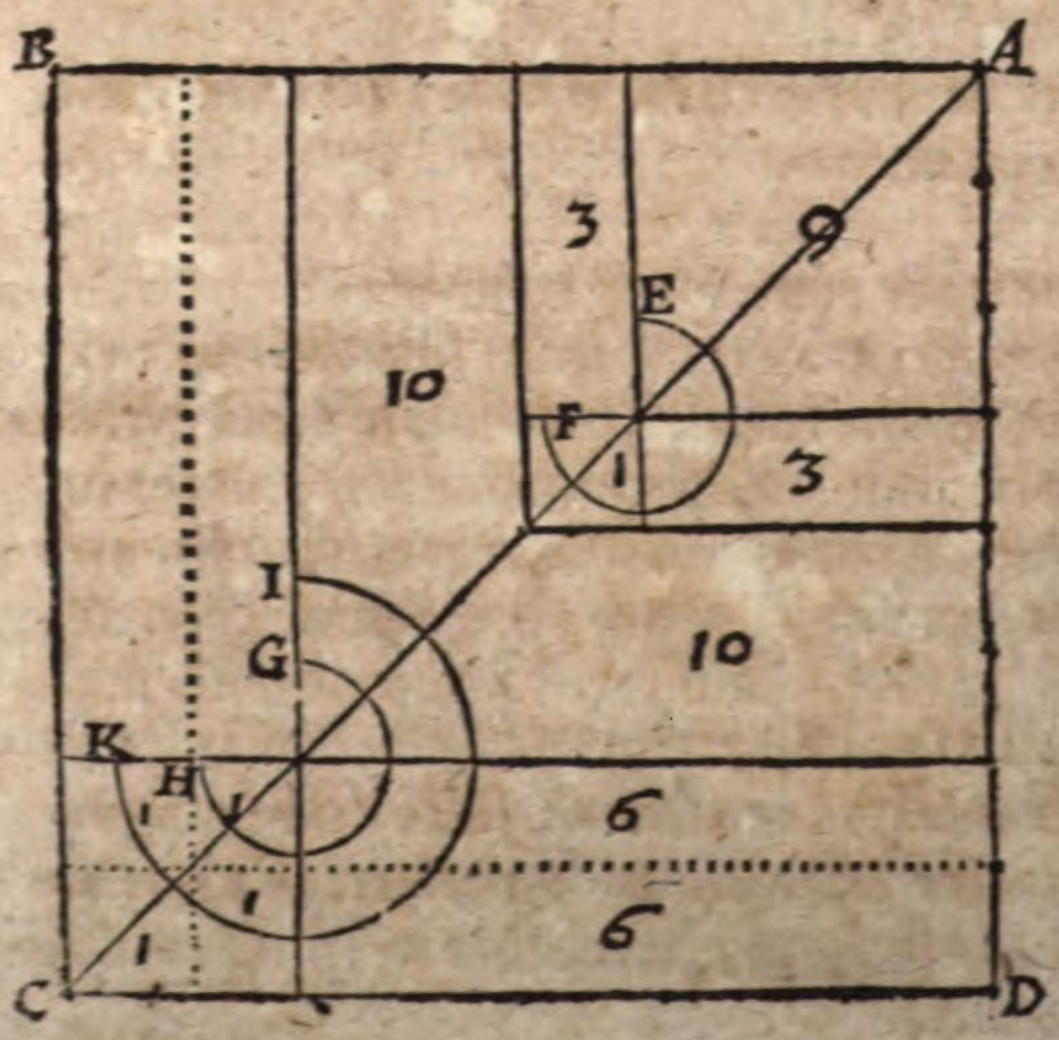
In hiſce numeris manifeſtè apparet quibus vinculis ſecundum ipſam naturam in continuis tribus proportionibus hæ comparatæ figuræ inter ſe devinciuntur. Primò enim media talia requiri nempe: 3. 6. 12. antea eſt demonſtratum. Deinde quod extremos terminos attinet, ſi id diligenter attendatur, videmus terminos iſtos ſemihexagono adpropriatos nempe 1. & 36 ita ſeſe reliquis extremis accommodare, ut alternis horum æquentur. Quum igitur poſsibile ſit circulos ſub rectilinea perfectè revocare, nec majorem unquàm

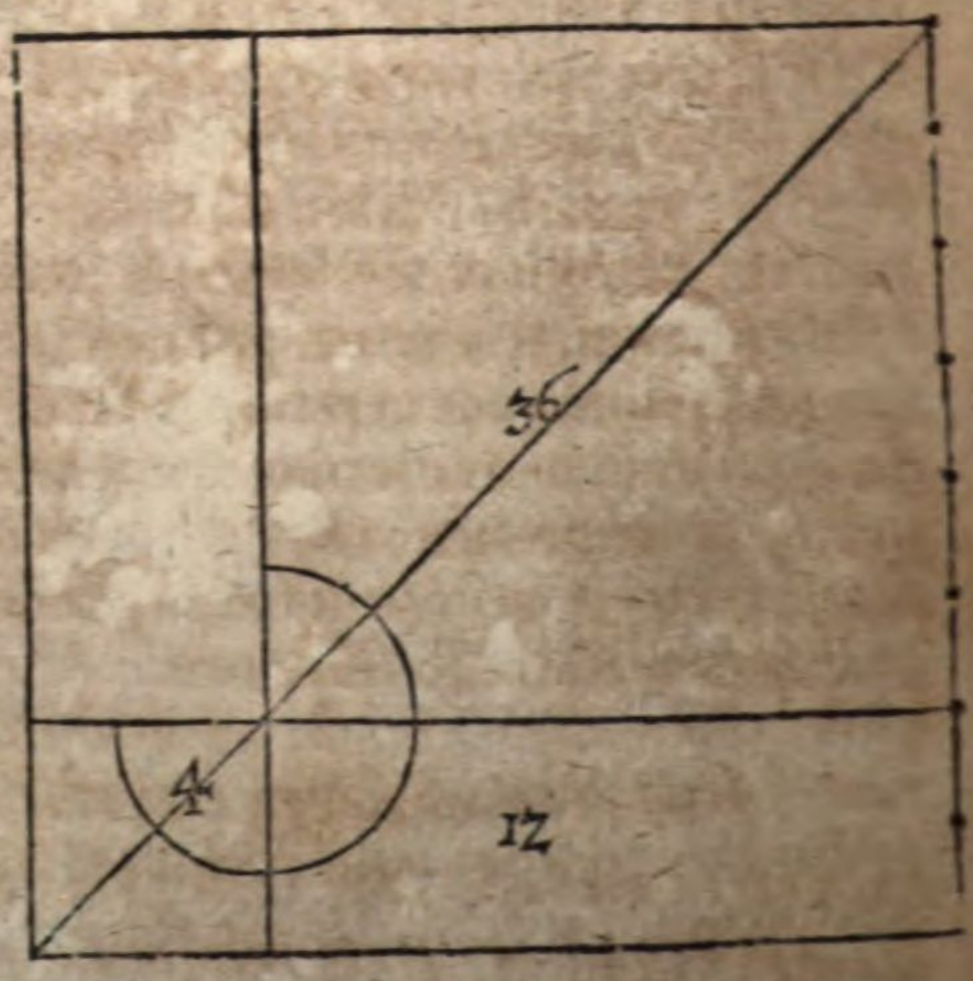
Prop 1. c. 5.





Conjunctim.





iu na-

in natura (quam nos ducem ſequimur) ſpatiorum ligam eſſe conſtet, quàm quæ hoc modo in tribus continuis conſtituta eſt : Quocirca magnitudines duorum ſemicirculorum cum ſemihexagono intra hæc ſpatia, hosq; numeros vere, ut propoſuimus, indicatæ ſunt. Quod ipſum tamen ne cuiquam dubium eſſe poſsit, duabus aliis diverſis *æquationibus*, ſuis deinceps locis, confirmabimus & jam, quod ſimul propoſitum eſt, menſuram hinc tàm ſectionis hexagoni, quàm Lunulæ ejusdem hexagoni toties exoptatæ, adeoq; totius circuli trianguli inſcripti reſpectu eruemus ; quod nunc nullo negotio fit. Quum enim conſtet differentiam inter ſemicirculum & ſemihexagonon inſcriptum eſſe 9 part: quando illius menſura inventa fuerat, 52 p : hujus autem 43 p : earundem, proinde quia tres in ſemicirculo ſectiones hexagoni ſunt, cedunt ſingulis ſectionibus ejusdem hexagoni 3 part : Et quia magnitudo ſemicirculi minimi IMK taxata eſt in comparatione cum ceteris pro 13 p : ſublatis igitur pro ſegmento hexagoni ILK 3. part : remanet Lunula hexagoni talium partium 10, qualium ſemicirculus principalis eſt 52, & totus ille circulus 104. p :

Deniq; quia ſemihexagonon inſcriptum æquale eſt triangulo æquilatero inſcripto eidem circulo, habebit ſe triangulum iſtud ad totum circulum, ut 43 ad 104. & ad triangulum circumſcriptum ut 43 ad 172. Quibus inventis facilè ſingulæ figuræ internæ, quas diagramma primum prop. 2. hujus continet, in ſuas menſuras expedientur ; quæ ſimul ad demonſtrandum erant propoſita. *Prop. 3. c. 6.*

Corollarium.

Quandoquidem dubium nullum eſſe poterit, quin circa exortum veræ Cyclometriæ plura θαυμασὰ ſeſe in lucem prodant, ex admirabili natura & prærogativa numerorum, & horum poteſtatum eruta, certè unum hêic liquido ſatis ſentitur, quippe in differentiis præoſtenſis inter ſemihexagonum ſuperius inventum, & ſemicirculos binos, quos illud proximè interjacet. Etenim differentiæ in potentia primorum numerorum 2 & 3, ut vides, conſiſtunt, cum idem ſemihexagonum 4 part : à circulo interiore, & 9. p. ab exteriore & ambiente diſtet : Quod certè dignum fuit, ut Corollarii loco adſcriberetur.

SCHOLION.

Summa hujus primæ Quadraturæ breviter ex antecedentibus repetitæ, quo Lector compendio intelligat nos naturalem Geometriam hêic ſequi, eſt, dum,

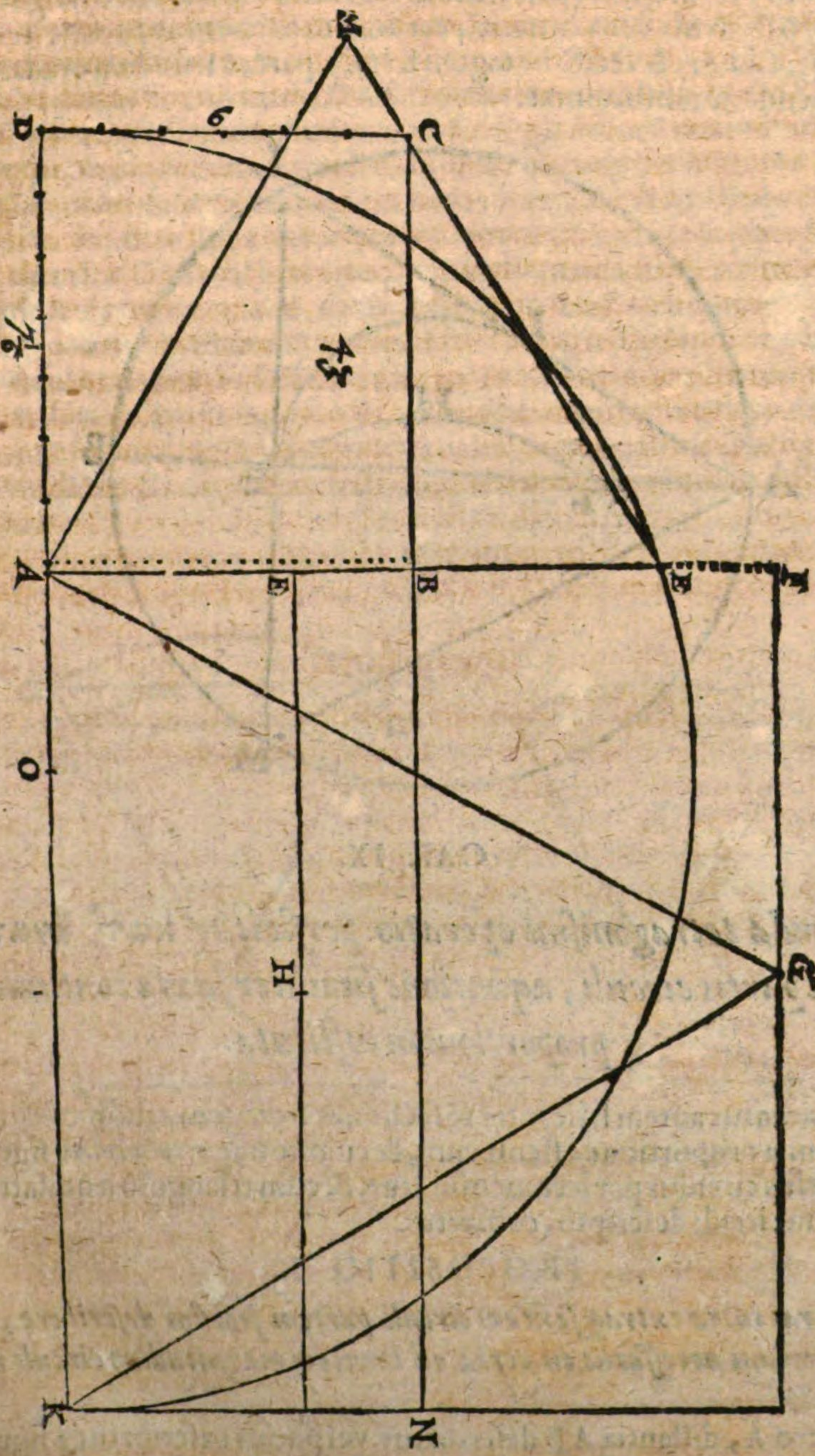
1. *Symmetra ſola hêic tractamus.*
2. *Comparationem horum per continuam trium proportionem inſtituimus.*
3. *Ex natura inſcripti hexagoni ac ejus ſemiſsis, quam in ſua juſta quantitate cum circulis nempe trigono æquilatero, inſcripto & circumſcripto ſolum quærimus, liquidò ſatis oſtendimus, eundem hêic duplam rationem ſervare, cum hiſce circulis, quæ antea c. 6. prop. 3. & cap. 7. prop. 3. manifeſtavimus, eum habere cum trigonis, inſcripto, ac circumſcripto, idq; mediorum comparatione ; ut nihil hêic deſiderari poſsit eorum, quæ connexionem planorum efflagitent & quadraturam abſolutam convincant.*

PROPOSITIO IV.

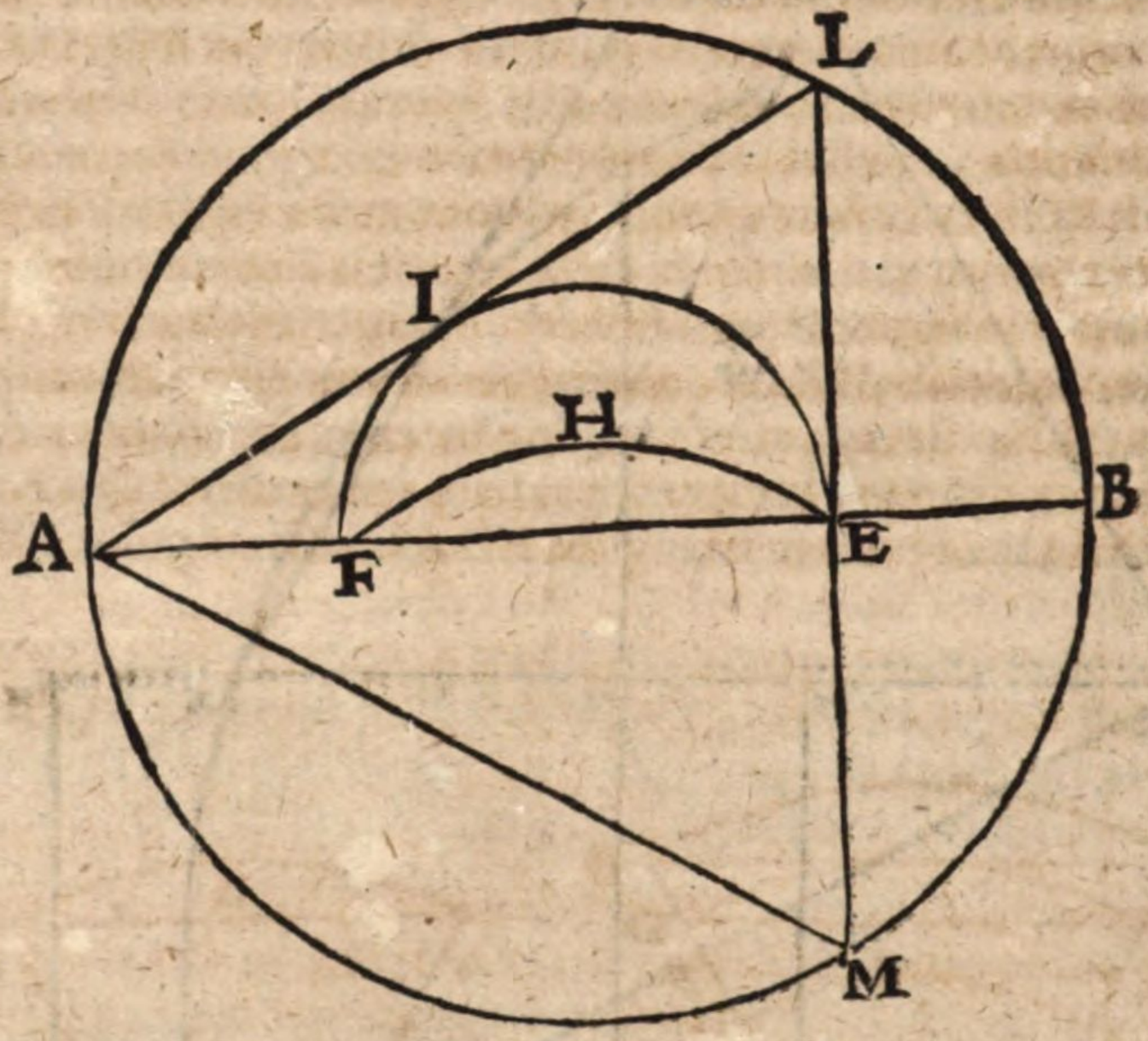
Semicirculum adeoq; totum circulum, item Lunulam & ſectionem hexagoni in certa menſura cum triangulo æquilatero inſcripto ex ſuperioribus patefactum ſub eandem veram menſuram cum hoc reducere.

Quoniam solo respectu ad invicem mensura circuli ad triangulum æquilaterum inscriptum inventa ac in numeris exposita est, igitur dum veram figurarum harum mensuram & magnitudinem desideramus, reductione opus est, quæ, ut mihi videtur, duobus modis institui potest: Primò dum latus trianguli æquilateri ac circulo cuivis inscripti, in partes 43 dividatur æquales; Deinde continuato eidem lateri tot æquales partes addantur, ut totum fiat 104, idq; habeatur pro uno laterere ctanguli constituendi areæ circuli æqualis. Pro altero autem sumatur semissis altitudinis ipsius trianguli, per omnia ut prop: 1. cap: 5. rectangulum B Z ν ν descriptum reperitur &c. Alter modus in vulgari reduc-
Prop 25. l. 6. tione fundatus, talis est: Exponatur mensura trianguli æquilateri inscripti ac superius inventi 43 part: nempe in secunda figura proximè præmissarum ultimarum, in rectangulo adjecto hêic A B C D, cujus dupla altitudo sit A F, verum A E $\frac{3}{7}$ de A B. Fiant autem parallelæ D A lineæ infinitè excurrenti E H. B N. F G. Deinde per circinum in linea E H capiatur æqualis distantia inter H A & H G, positoq; centro H describatur circulus A G K peripheriâ occultâ, cui triangulum æquilaterum A G K inscribatur. Postea divisa linea D K bifariam in O describatur
Prop. 25 l. 6. semicirculus D L K. Et quia ut est A N rectangulum ad D B rectangulum; Sic latus A K trianguli æquilateri, cujus altitudo dupla est altitudinis rectanguli D B, ad latus A L figuræ similis. Est igitur latus A L medium proportionale inter A K & A D, & propterea triangulum æquilaterũ A L M æquale rectangulo proposito A B C D, velut in proxima sequente figura hæc omnia oculis exponuntur. Est & alius specialis modus reductionis rectanguli in triangulum æquilaterum, qui infrà seqq; æquationi accomodabitur.

Deinde


E
D
G
C
M
45
A
B
B
F
O
H
F
K
Z

Prop. 5. l. 4. *Deinde triangulo* æquilatero A L M circumſcribatur circulus A L B M, ut in ſequente figura, ſicq; reductio trianguli æquilateri inventi in σχῖσιν cum invento circulo ſub veram cujusq; magnitudinem facta eſt, adeo ut trianguli menſura intra 43 p: circuli verò intra 104 earundem partium appareat; item Lunula hexagoni E I F H 10; & ſectio hexagoni E H F 3. part: earundem evadant; Quod quoq; faciendum conſtituimus.



CAP: IX.

Vbi ſecunda tetragoniſmi operatio perficitur κατ' ἀνατομίαν ſextæ partis circuli, æquatione ſimiliter juxta continuam proportionem inſtituta.

Lem. 1. c. 5. COmparantur autem hêic inter ſe ſectiones hexagoni trium circulorum in continua proportione oſtenſorum, & cum totidem *corniculatis* figuris. Unde rurſus circulus per hæc menſuratur, & cum triangulo æquilatero, à radiis ejusdem circuli deſcripto, confertur.

PROPOSITIO I.

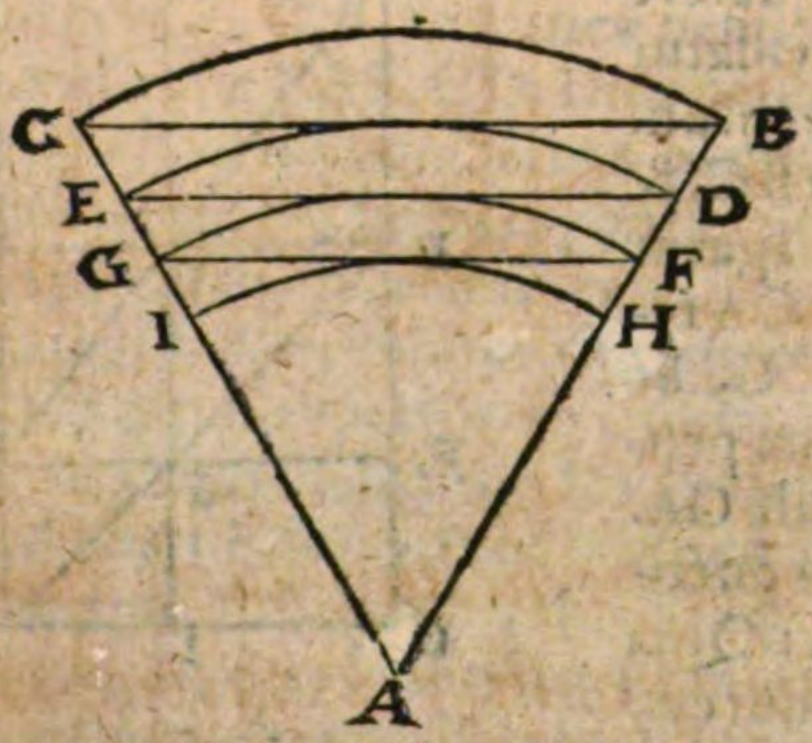
Figuras intra extraq; ſextam circuli partem ſeorſim deſcribere, quorum datis quibusdam neceſſariis in certa ad invicem magnitudine circuli menſura iterum datur.

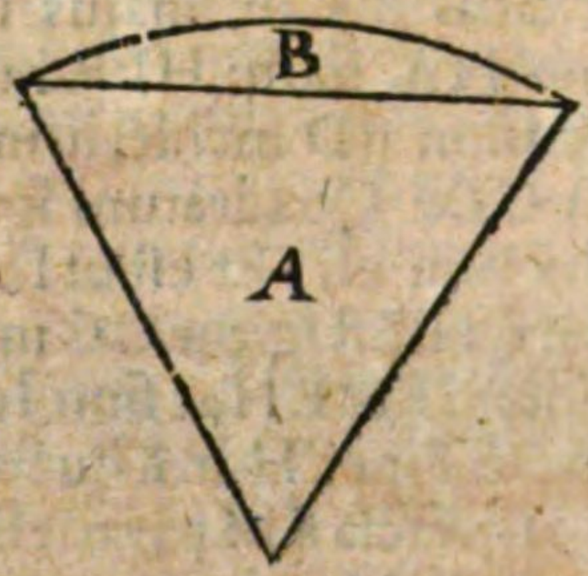
Centro A, diſtantia A B deſcribatur vel potius exſcribatur è figura Lemmatis primi cap. 5. præmiſſorum, ſexta pars circuli extimi B A C; & ducatur ſubtenſa B C, ac primò inſcribatur ſexta pars circuli medii D A E. Rurſus ducta D E ſubtenſa inſcribatur infimi trium circulorum ſexta pars F A G. Ultimò ducta F G

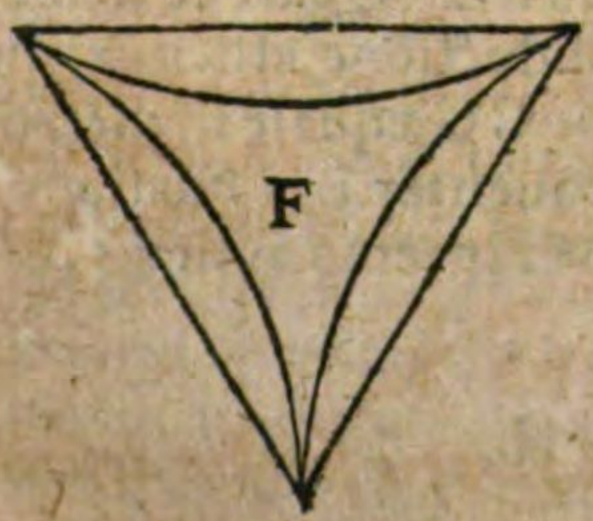
ſubtenſa

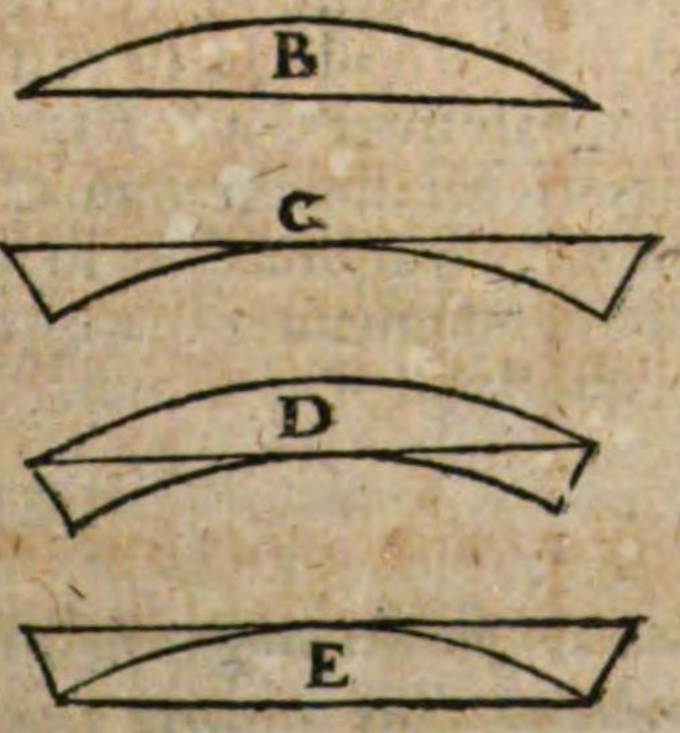
ſubtenſa inſcribatur è communi centro A, arcus HI; Sunt igitur hæ ſectiones hexagoni ac corniculatæ figuræ intra ſectorem BAC apparentes primò inter ſe commenſurabiles; deinde omnes ſimiles figuræ, quæ hêic reperiuntur, in continua proportione ſubſesquitertia aſſcendendo, hoc eſt, ut numerus ternarius ad numerum quaternarium. *Prop. 3. c. 6 Lem: 1. c. 5.*

Porrò ſector circuli medii DAE ſeorſim exponatur in figura A, cujus ideò ſectio eſt B æqualis ſectioni hexagoni DE: Quæ ſectio B etiam evidentiæ cauſa ſeorſim exponatur, & dum intra triangulum æquilaterum A vel DAE ex ſingulis hujus lateribus deſcribatur, naſcitur inde figura F, quam *Ioſephus Scaliger* complementum *Securiclæ* appellabat, compoſitam ex tribus corniculatis figuris, quarum una eſt BCED, & hêic quoq; evidentiæ cauſa expoſita in figura C; in quas quidem tres corniculatas, etiam dicta Securicla F commodè reſolvi poteſt. Præterea exponitur in figura D pariter ſectio hexagoni ſectoris medii DE, una cum corniculato inferiore DEGF, quæ 24 pars totius circuli medii eſt. Item in figura E eadem ſectio hexagoni circuli medii cum corniculato ſubſequente BCED, quæ figura E integrè ſumpta tertia pars trianguli eſt DAE, ſed quarta pars trianguli BAC: Siquidem triangulum DAC ad triangulum BAC ſe habet ut 3 ad 4. *Lem: 1. c. 5.*









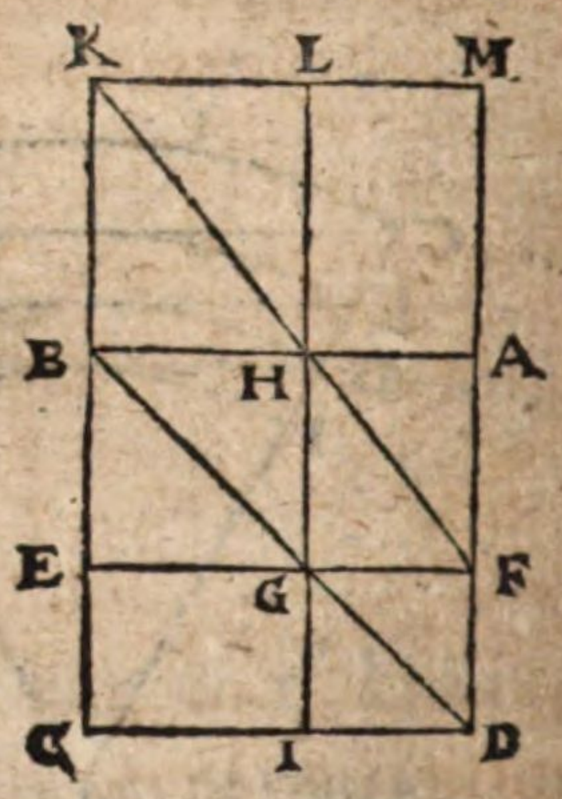
Quum igitur in figuris D & E eadem ſectio hexagoni ſit incluſa, & ratio reſiduorum in corniculatis figuris eſt ut 3 ad 4, proinde ubi dicta corniculata in

certa ad invicem magnitudine, & cum ipsa sectione hexagoni medii, cui symmetra sunt, determinata fuerint, etiam datur magnitudo sextæ partis circuli seu sectionis D A E, ad magnitudinem trianguli æquilateri D A E, & per consequens circulus hinc quadratur; quod proposito in seqq: inservit; Et certè notatu dignum est, quod quæ ratio fuerit sectionis hexagoni medii circuli D E ad triangulum sibi subjectū, D A F, quia eadem est B C sectionis circuli supremi ad sibi subjectum triangulum B A C: Sed & D E sectio est ad sectionem B C ut 3 ad 4, quare rectissimè secundum naturam proport: oblata est sectio D E superius in 3 part: Nunc, Deo ac natura duce, pro diversis planis similiter in continuis proportionibus consistentibus, ad secundam *æquationem*, qua circulus quadratur, properabimus, lemmatibus nonnullis præmissis.

LEMMA I.

Tria (aut plura) spatia in rectilineis parallelogrammis sub eadem continua proportione inter suas parallelas ita consignare, ac magnitudine inter se æquare, ut infimum majoris parallelogrammi æquale fiat medio minoris, & medium majoris supremo minoris, & sic consequenter in infinitum.

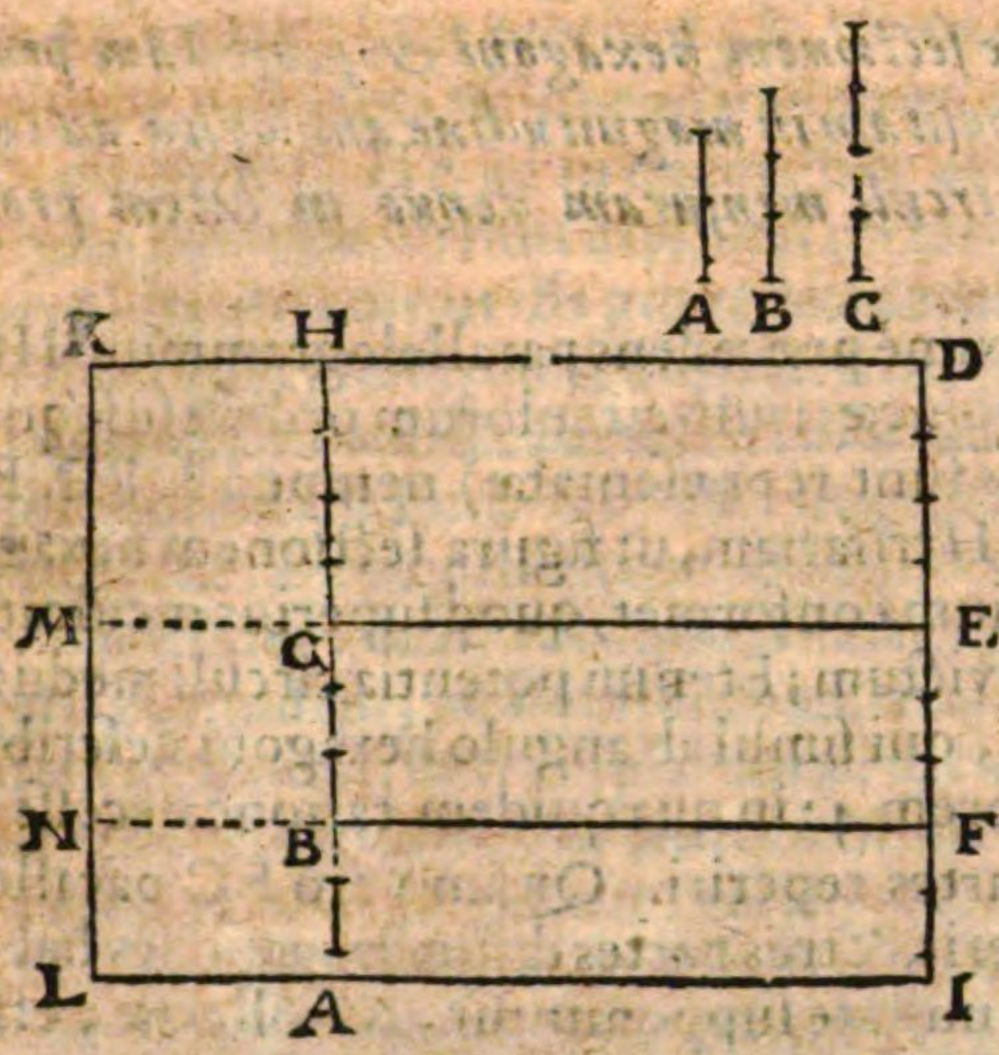
Prop. 4 c. 7. Concipiatur aliqua species parallelogrammi inter superius expositas, ut puta quadratum A B C D, & producto infinitè latere C B; deinde ductâ diagonio D B, dividatur rationaliter latus B A in majus segmentum B H, ac minus H A, fiatq; H I Parallela B C, & Prop. 4. c. 7. ubi in diagonium B D inciderit in G, agatur E F parallela C D. Quadratum igitur C A rationaliter divisum est; Et est ut I H ad C G, sic Prop. 43. l. 1. rursus C G ad E H. Est igitur C G medium proportionale inter I F & E H ac simul æquale G A. Rursus recta ab F per H in K ducta, & eductis I H & A D, atq; facta K M parallela B A: Quia rectangulum K E F M rationaliter divisum est, & quia ejus complementa sunt E H & H M, igitur hæc inter se quoq; sunt æqualia. Porrò ut est G A ad E H, sic rursus E H ad B L. Quare & hêic E H est medium proportionale inter G A & B L. Hac inductione efficitur, quod infimum spatium majoris parallelogrammi C L nempè C G æquale sit medio minoris parallelogrammi I M, utputa G A: Et sic consequenter E H medium spatium majoris parallelogrammi inter tria, æquale H M supremo minoris, & sic porrò in infinitum, quod erat propositum.



LEMMA II.

Datas tres similes magnitudines in continua inter se proportione in planis parallelogrammis convenienter exponere; & hisce dissimiles proximas, sed & aquè multiplices magnitudines ita apponere, ut sub eadem continua proportione omnes simul appareant.

Assu-



Assumantur tres similes magnitudines, ut illæ, quæ postea in ternis sectionibus hexagoni triũ circulorum ordine inter se conferendis usurpari debent, juxta eam analogiam ac proprietatem, quæ superiusostensa est: nempe A $2\frac{1}{4}$ B. 3. & C. 4. scilicet proportionis continuæ sesquitertiæ. Deinde lineæ adscriptæ per quas datæ proportionis magnitudines repræsentantur, sibi ordine continuatæ unam lineam rectam cõficiant, fitq; illa A H, in qua tanem propositæ magnitudines similiter interstinguũtur, ut referat A B magnitudinem A; B C magnitudinemß; deniq; C H magnitudinem C, in eadem data ratione subsesquitertia. *Lem. 1. cap. 5. & Coroll: 3. Prop. 1. c. 5.*

Porrò ad aliquam convenientem distantiam ducatur linea D I parallela H A, ad quam ex H. C. B. & A lineæ parallelæ agantur H D. C E. B F. A I, ut parallelogramma fiant A F. B E. C D. Dico primùm eadem parallelogramma eandem continuam proportionem hêic in plamis rectilineis inter se servare, quam ipsæ magnitudines suprà in lineis expositæ. Siquidem parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita sunt inter se, ut bases, quæ hêic sunt lineæ A B. B C. C H. *Prop. 1. l. 6*

Sint autem magnitudines istæ partes trium circulorum similes, utputa tres sectiones hexagoni superius propositæ, quæ sic in parallelogrammo toto A D proportionatæ sunt in data ratione subsesquitertia. Porro si eidem parallelogrammo adjiciatur aliud, quod æquè eorundem trium circulorum multiplices partes continet, dissimiles quidem à prioribus hexagoni sectionibus; verum illis proximas, & inter se similes, utputa tria *corniculata*, quæ superius etiã descripta sunt, ordine intra parallelogrammum K A delineata ac designata, postquam per idem parallelogrammum K A, lineæ rectæ B N & C M à lineis F B & E C fuerint continuatæ; Dico secundò, quod in eodem parallelogrammo K A partes seu plana trium dissimilium magnitudinum cum prioribus, sed similium inter sese ad eandem proportionem subsesquitertiam concurrant. Sunt enim hæ magnitudines ad easdem altitudines ac parallelas cum superioribus redactæ. *Prop. 1. huius. Prop. 2. huius. Prop. 1. l. 6.*

Atqui hêic apparet, quod saltim rationes seu proportiones propositarum magnitudinum invicem conferantur atq; æquentur, non etiam nunc ipsæ magnitudines; ut si infima magnitudo parallelogrammi D A, nempe A F æqualis esset infimæ trium sectionum hexagonicarum suprà in figura 1 prop. capitis hujus ostensarum, tunc media magnitudo B E æqualis foret mediæ illarum sectioni; deniq; suprema C D, supremæ sectioni ejusdem hexagoni, quippe in ratione subsesquitertia.

Similiter quoq; in parallelogrammo K A, quando *corniculatæ* figuræ tres inibi inter se conferuntur, vel spatia has referentia, nempe infimum A N, cum medio, B M, & supremo hujus generis C K. Hêic enim sola quoq; ratio seu proportio harum figurarum inter se spectatur, quæ itidem est subsesquitertia. PRO-

PROPOSITIO II.

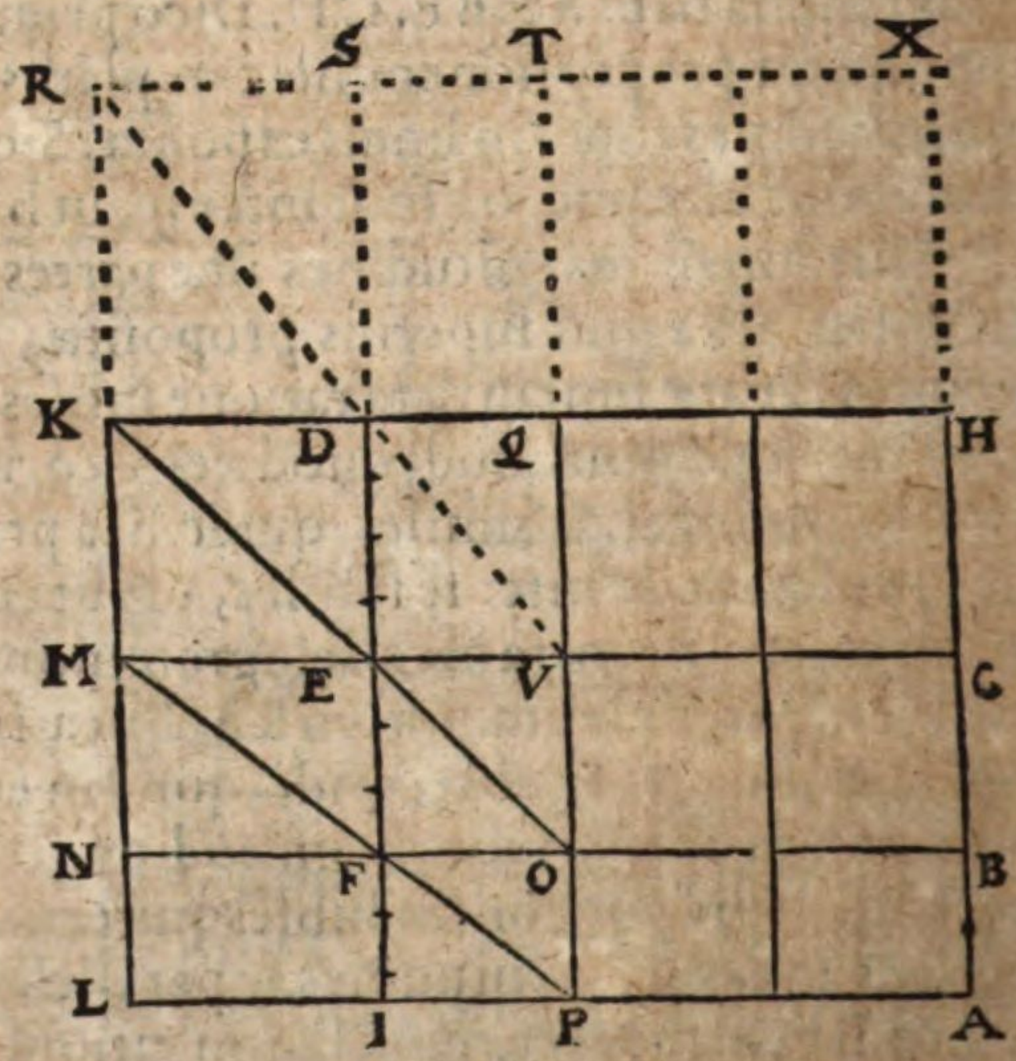
Figuras circuli dissimiles nempe sectionem hexagoni & subjectam proximè corniculatam figuram superius expositam in magnitudine analogica ad invicem ostendere; & harum respectu circuli mensuram denuo in lucem producere.

Lem: 2. hujus. *Lem: 1. c. 5.* *Prop 1. cap. 9. &c.* *Coroll: 3. pr. 1. cap. 6.* *Item prop. 1. hujus.*

Describatur juxta Lemma proximè præcedens parallelogrammum I H, in quo exponantur tres sectiones hexagonicæ trium circulorum ordine se sequentium (ut aliquoties ea superius oculis sunt repræsentatæ) nempe I B. F C. E H.

Deinde diviso latere I A, vel D H trifariam, ut figura sectionem hexagoni circuli medii referens se ad principium conformet, quod superius inculcatum est, imò ratione demonstrationis convictum; Etenim potentia circuli medii sese habet ad potentias circumstantium, qui simul ab angulo hexagoni describuntur, ut 3 ad inferiorem $2\frac{1}{4}$, ac superiorem 4: in qua quidem ratione necesse est, omnes horum circulorum similes partes reperiri. Quum verò F C parallelogrammum *Scamnatum* (ut vocant) fuerit, & tres partes distinctas æquales habuerit, quarum singulæ pro monade seu unitate supponuntur, & collectæ 3 efficiunt; Igitur per æqualia segmenta ductâ Q P &c. parallela D I; reliquæ quoq; figuræ, quæ circumstant, sectiones referentes, nempe I B infima, pro $2\frac{1}{4}$, & suprema E H, pro 4 talium partium, qualium medium F C 3 est, taxantur.

Lem: 2. hujus.



Amplius quoniam tàm authoritate *Platonis*, quàm præmissis, ac multipliciter penes circulum ac rectilineum demonstratis, constat, plana ex continua trium proportione maximè cohærere: Et quia in hac circuli anatomia, quæ suprà administrata est, *corniculatæ* figuræ præcipuè reperiuntur, per quas, sectionibus vicinis additas, ab hisce tam in partes circulares, quàm rectilineas transitus fiat; idcirco has corniculatas figuras, sectionibus suis hexagoni, ordine modò in rectilineis præparatis adjungi oportet, quod etiam absq; ἀσυμμετρίας inpedimento fieri posse, satis superius ostendimus. Proinde dum quoq; hoc ἐπιχείρημα Quadrationis ad trium continuam proportionem devolvitur, producatur C E infinitè versus M, & ducatur P F diagonius, ac producatur donec occurrat lineæ infinitè eductæ in M. Similiter O E donec obviet H D productæ in K, & sic porrò V D in R. Primò igitur ut cognoscatur linea recta R L descendere per puncta K M N; & simul quanta fuerit distantia L ab I, data I P, vel F O part: unius. Erit ut F I $\frac{3}{4}$ ad I P. 1: Sic E F 1 ad F N $1\frac{1}{3}$. Eodem modo ut est F E 1. ad F O 1: Sic D E $1\frac{1}{3}$ ad E M vel D K $1\frac{1}{3}$. Deniq; ut D E $1\frac{1}{3}$ ad E V. 1. Sic D S

Prop. 1. cap. hujus. *Prop 2. & 3. cap. 6.* *Prop. 4. l. 6.*

sic DS 1⅔ ad SR 1⅓. Est igitur distantia semper inter lineam SI, & RL 1⅓. qualium IA fuerit trium partium, & IP partis unius, & adeò SI & RL parallelæ. Porrò quia in eadem ratione ad invicem sunt tria spacia addita, nempe LF. NE. MD. quâ IB. FC. HE ad invicem, hæc autem quia pro sectionibus hexagonicis trium circulorum sunt exposita; certè naturæ circa plana inter se devincienda prorsus convenit, ut illa pro tribus corniculatis figuris iisdem sectionibus ordine subjectis agnoscamus, singulis scilicet suæ speciei seu similitudinis respectu; quandoquidem hæ partes circulorum expositorum sectionibus suis immediatè subordinatæ sunt. Sic etiam singula spacia cum proximis superioribus in ratione sunt subsesquitertia, ut id aliquoties suprà inculcatum est. *Lem: 2 hujus.*

Similiter quando dissimiles hasce figuras in circulis, nempe sectiones hexagoni eorundem, ac simul corniculatas comitantes ulterius in eam comparationem dirigimus, ut quæ ipsarum ad invicem magnitudines fuerint cognoscamus (quandoquidem id ἀδύνατον minimè sit, eò quod inter se commensurabiles superius ostensæ exstent) rectè profectò ad medium in natura confugimus, quod dictat ac luculenter demonstrat, plana inter se continua proportione cohærere; Igitur in parallelogrammo LMVP, quia LF & FV inter NE & IO media sunt proportionalia; præterea LF & FV spacia sunt æqualia, quorum illud corniculatam figuram subscriptam sectioni hexagoni trium circulorum ex eodem descriptorum infimi denotat; hoc ⅓ sectionis hexagoni medii eorundem circulorum; Quocirca hæc spacia inter se sunt æqualia. Et quia FC sectio media supposita fuit 3 part: erit LF dicta *corniculata* figura (seu spacium pro eodem substitutum) p: 1. quæ hêic collateralis apparet suæ sectioni IB part: 2¼. Quoniam verò tres etiam dictæ corniculatæ figuræ, vel spatia easdem referentia, nempe LF. NE. MD in ratione ad invicem sunt subsesquitertia; sequitur quod NE *corniculatum* medium sit 1⅓, qualium FC sectio ejusdem est part: 3. Item MD *corniculati* supremi rationem habens sit 1⅞ qualium etiam sectio hexagoni supremi circuli est earundem part. 4. Quando igitur, juxta ea quæ superiùs demonstrata sunt, NE 1⅓ additur ad FC. 3. summa fit 4⅓ quippe 24 pars circuli medii; Oritur ergo & hêic mensura totius circuli 104, qualium sectio hexagoni ejusdem circuli supponitur 3 part: *Prop. 3. c. 6.* *Prop. 4. c. 7.* *Prop 43. l. 1.* *Prop. 1. hujus.* *Item Lem: 2. hujus.* *Prop. 1. cap. hujm.*

Similiter triangulum æquilaterum huic medio circulo inscriptum, & hêic in iisdem partibus, quibus in superiore æquatione, invenitur. Si enim addatur MD 1⅞ ad FC. 3. summa fit 4⅞ quæ ter reassumpta constituit triangulum æquilaterum à radiis hujus circuli medii inclusum nempe 14⅓, cujus triplum est triangulum æquilaterum inscriptum, & ideo illud, ut prius, 43 part. Circuli ergo *Quadratio* & hêic, nempe diverso *æquationis* modò à superiore in lucem producta est, diversarum figurarum in circulo utputa *sectionis* hexagoni & *corniculatæ* figuræ ejusdem, magnitudine, inter se, beneficio continuæ proportionis, demonstratâ. Quod erat propositum. *Prop. 1. cap. hujus.* *Prop. 3. c. 6.*

ADMONITIO.

Quia tota demonstrationis vis atq; artificium consistit in diversarum figurarum penes circulum *æquatione*, nemo nos meritò incusabit tanquam principium petentes, dum sectionem hexagoni in superiore æquatione inventam hêic supponamus; Etenim, præter rationem, quæ è natura circuli desumpta nos

eò adegit, ut ſuprà videre eſt, ad id ſolum fit reſpectus, ut magnitudo dictæ ſectionis in comparatione cum magnitudine adjuncti *corniculati* ex ipſa circuli ac planorum indole poſsit demonſtrari, quod ſic factum eſſe, ſi quis amplius dubitet, eidem ſequentem propoſitionem damus.

PROPOSITIO III.

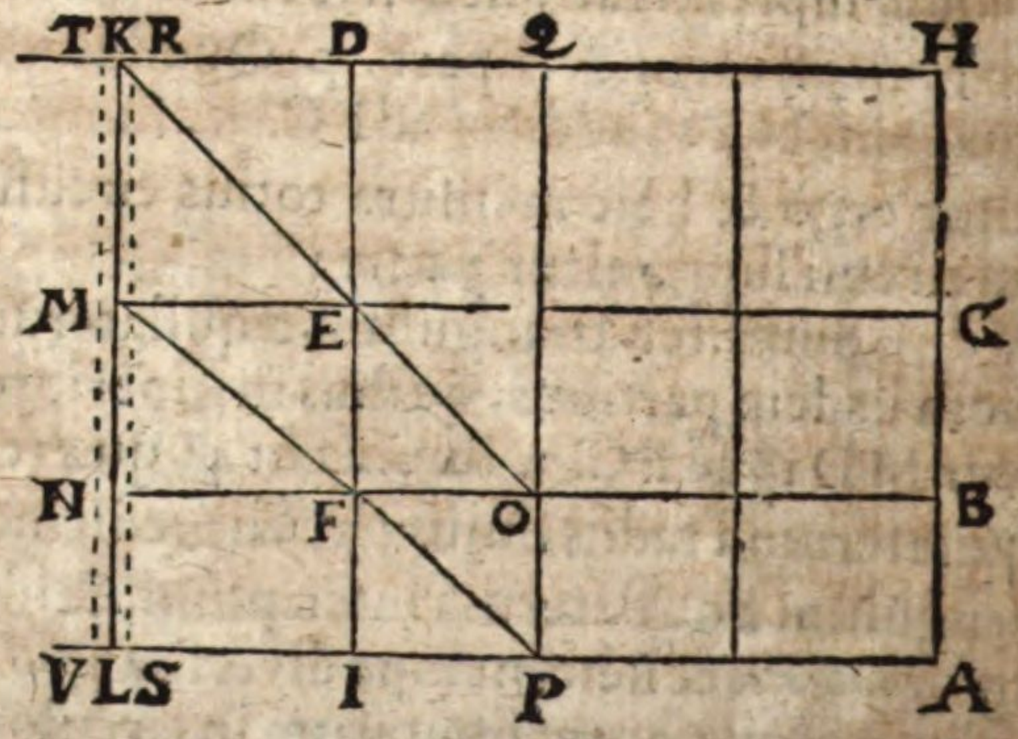
Demonſtrare, quod nulla alia, quàm inventa menſura, circulo competat, dum prædemonſtrata ſymmetria partium ſeu diſsimilium figurarum ejusdem circuli certitudinem ſuam obtinebit, & Natura ipſa in continuis proportionibus, ad plana inter ſe devincienda, vigebit.

Dubium nullum eſſe poteſt, quin ſolæ proportiones trium ſectionum hexagonicarum, quæ ſuprà definitæ ſunt, ſatis rectè in parallelogrammis IB. FC. EH figuræ hic reiteratæ exponantur; Neq; dubium eſſe poteſt, quin tria *corniculata* intra adjunctum parallelogrammum IK rectè dictis tribus *ſectionibus* in plano rectilineo ſint addita: Sed & ſymmetria *ſectionum* iſtarum, nempe IB. FC. EH cum *corniculatis* LF. NE. MD. ſuperius certò demonſtata exſtat. Dico igitur, ſi dicta tria corniculata cum ſectionibus hexagoni trium circulorum, quibus ſunt adjuncta, reverà aut majorem aut minorem magnitudinem ſortientur, quàm modò inventa eſt; & ipſorum ad invicem præoſtenſam ſymmetriam, & ipſam planorum naturam continuis proportionibus cohærentem violari. Etenim eſto primùm, quod ſpatium NE majorem proportionem habeat ad ſpacium FC, quàm $1\frac{1}{7}$ ad 3, unde quoq; menſura circuli præfinitâ 104 minor aliquanto evadit, ut Analytici urgent; tunc lineæ EM vel FN ultra punctum in ea, per diagonium PF eductam, ampliantur.

Lem: 2. huius.

Ceterum tale augmentum lineæ EM &c. efficit, ut ſpatium *corniculatum* NE, ſpatio pro ſectione hexagoni circuli medii aſymmetrum fiat, quod contra demonſtratum eſt: Nec ullo modo praxis pro cohærentia planorum intra continuas proportiones manere poterit, niſi M punctum ſit, in quod PF educta incidat: Sunt enim ſpatia hæc in continua proportione, utputa IO. LF. NE; & in quadrato NQ eodem modo EO. NE. MD continuè proportionalia: quod neutiquam fiet, ſi LD parallelogrammum auctum fuerit & pro KL poſita TV parallela. Eodem plane modo fit, Si RS parallela KL intra parallelogrammum LD ducatur, atq; hinc magnitudines corniculatorum minuantur, fiatq; inde menſura circuli major 104 part: qualium FC eſt 3 part: ut ſi proportio uſitata, ex Archimede, diametri ad perimetrum fiat $3\frac{1}{7}$; Nec enim tunc vel ſymmetria erit NE cum FC; Nec planorum connexio, quàm natura in continuis proportionibus urget. Quare tàm ſymmetriæ harum diſsimilium in cir-

Prop. 3. c. 6.



in circulo figurarum, utputa *sectionum* hexagoni & adjunctorum *corniculatorum* respectu, *quæ* superius demonstrata est; quàm continuatæ in natura planorum proportionis, alia mensura circuli dari minimè potest, quàm ea; quæ nunc è duplici æquatione spontè (ob symmetriam, quam triangulum æquilaterum cum circulo, cui inscribitur, habet, quamq; aliæ figuræ quædam intra circulum ob eandem causam cum eodem pariter sortiuntur) emersérat. Quod erat ostendendum.

Notatu autem insuper dignum est, quod scilicet in Orthogonio M L P, quo planorum connexio fit, divina, ut vocant, laterum proportio se prodat. Etenim aut L P se habet ad 4: sic L M ad 3. unde tertium latus P M necessariò efficitur part: 5. velut penultima prop. lib. 1. Elem: à Pythagora omnium primo in hisce numeris inventa perhibetur.

Restat nunc, ut & hêic magnitudines harum figurarum diversarum circuli inter se inventas ac proportionatas sub convenientem, quæ in eo apparet, magnitudinem reducamus; quæ reductionis ratio licet à superiore non differat; tamen in gratiam tyronum eandem paullò aliter perficiemus, & circuli Quadraturam simul hisce ante oculos sistemus.

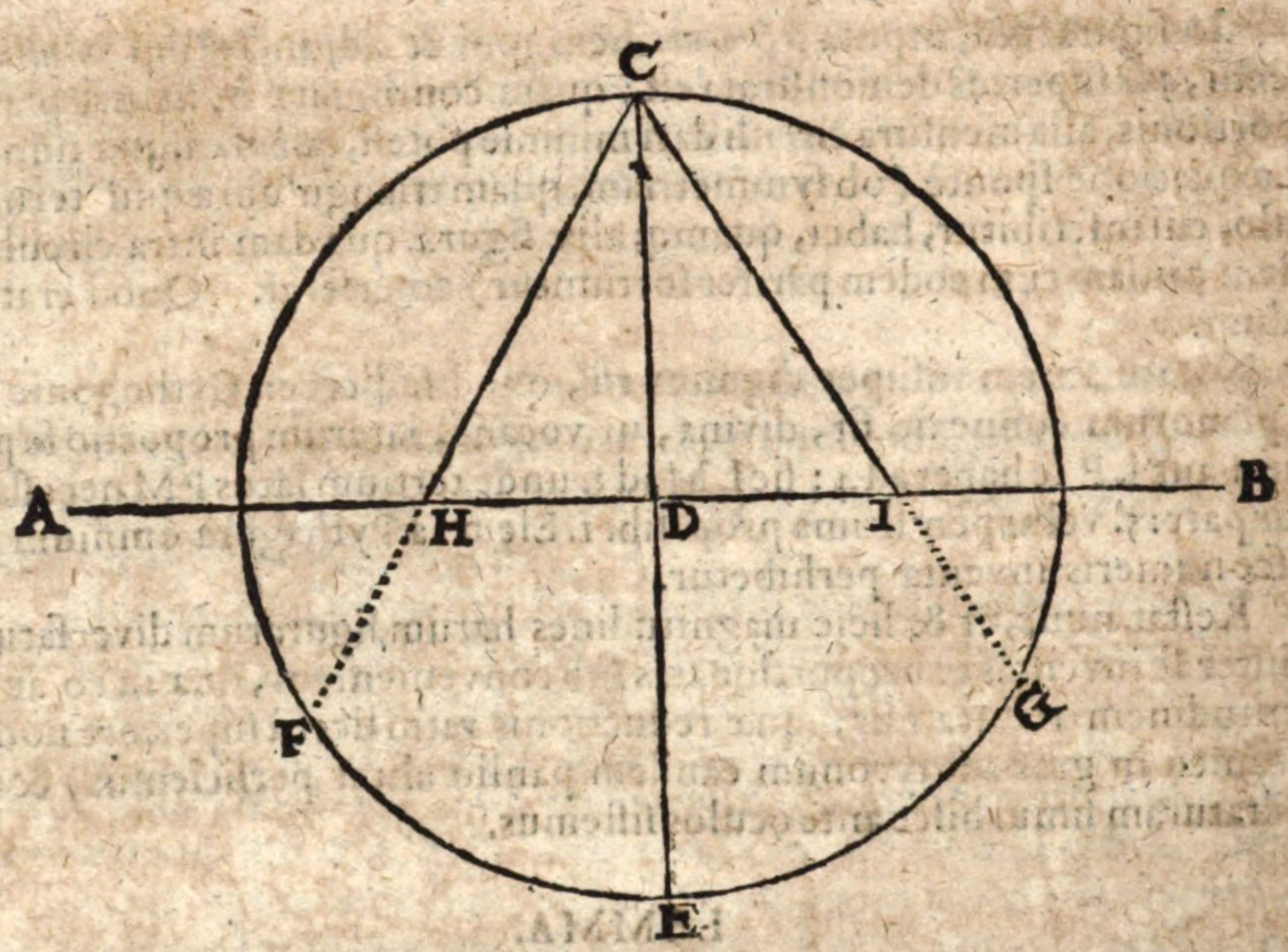
LEMMA.

Super linea recta infinitè ducta triangulum æquilaterum, cujus altitudo datur, describere.

Hoc problema quia ad compendium reductionis hoc loco facit, quæ ceteroquin generaliter per στοιχεῖωσιν Euclideam peragi solet, illud igitur, quod anteà exstare haud sciam, reductioni hoc loco præmitto, quod tale est. *Prop. 25. l. 6.*

Sit linea infinitè ducta, super qua triangulum æquilaterum, cujus altitudo datur, sit describendum.

Ducatur linea infinitè AB, super qua describendum est triangulum æquilaterum, cùjus altitudo C D data est; & posito centro D distantia ipsius altitudinis D C describatur circulus, & producto radio C D, ut fiat diameter circuli C E, & utrinq; ab E puncto extremo diametri, circino in eadem extensione, qua prius circulus descriptus est, puncta bina notentur, quæ ideò æqualia distabunt ab E in F & G. Quum autem à C ad hæc puncta binæ lineæ ducantur, abscindunt lineam infinitè descriptam AB in H & I, ut sit triangulum H C I æquilaterum, cujus D C altitudo data est, quod erat faciendum.



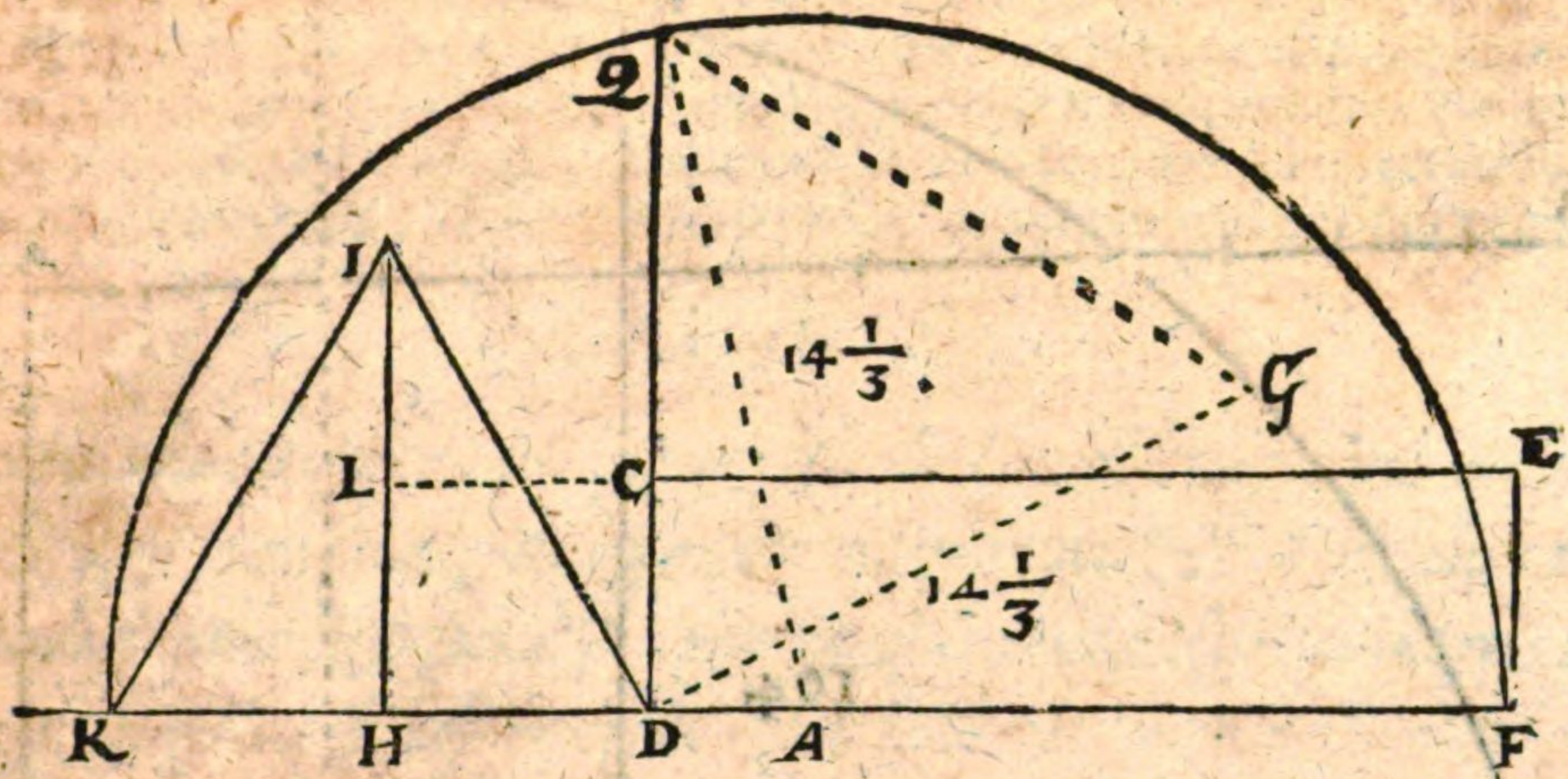
Demonſtratio autem Lemmatis hujus facilima eſt; Quum enim in trian-
Prop. 20. l. 3. gulo æquilatero ſinguli angulorum tertiam circuli partem ſeu 60 gr: includant, dum angulus à peripheria ſubduplus ejus eſt, quæ à centro: conſtat igitur primum, quod triangulũ HCI angulũ habeat ad C 60 grad: Deinde, quia in triangulo rectilineo tres anguli ſunt æquales duobus rectis; porrò quia triangulum æquicrurum angulos ad baſin habet æquales, efficitur hinc ut etiam anguli ad H & I ſinguli ſint 60 gr: Deniq; quia æquales angulos æqualia latera ſubtendunt; erunt itaq; omnia tria latera trianguli HCI æqualia & ideò triangulum æquilaterum & æquiangulum ſimul.

Notatur autem in praxi, quod centrum circuli occultè deſcribendi etiam quovis loco poſsit poni in linea CE, modò C extremum diametri ejus punctum fiat.

PROPOSITIO IV.

Menſuram trianguli æquilateri à radiis circuli deſcribendi inventam 14$\frac{1}{7}$ qualium circulus eſt 104 ritè in magnitudinem ipſius trianguli reducere, atq; hinc Quadratum æquale circulo oſtendere: & talis circuli radium, quàm proximè determinare.

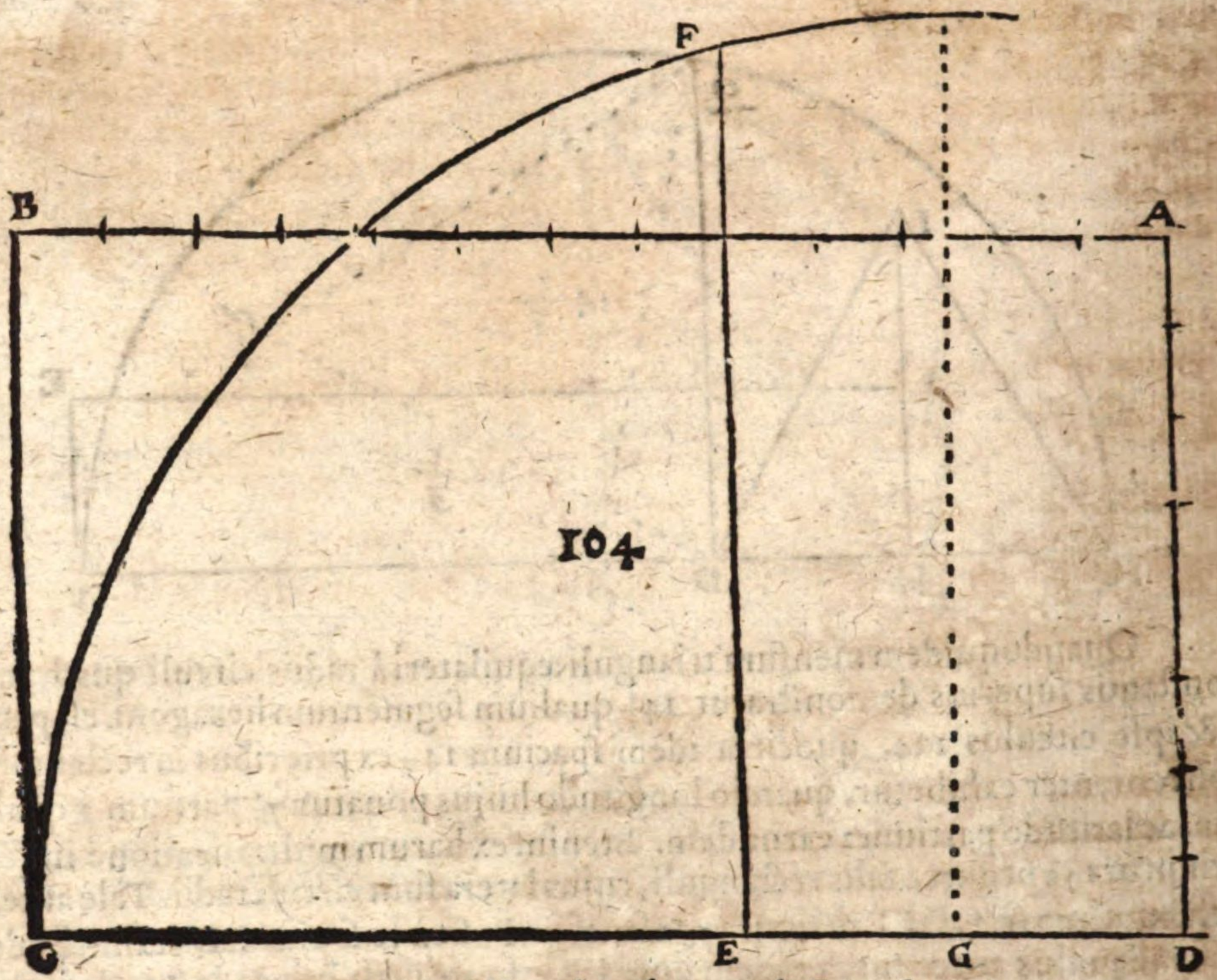
Quan-



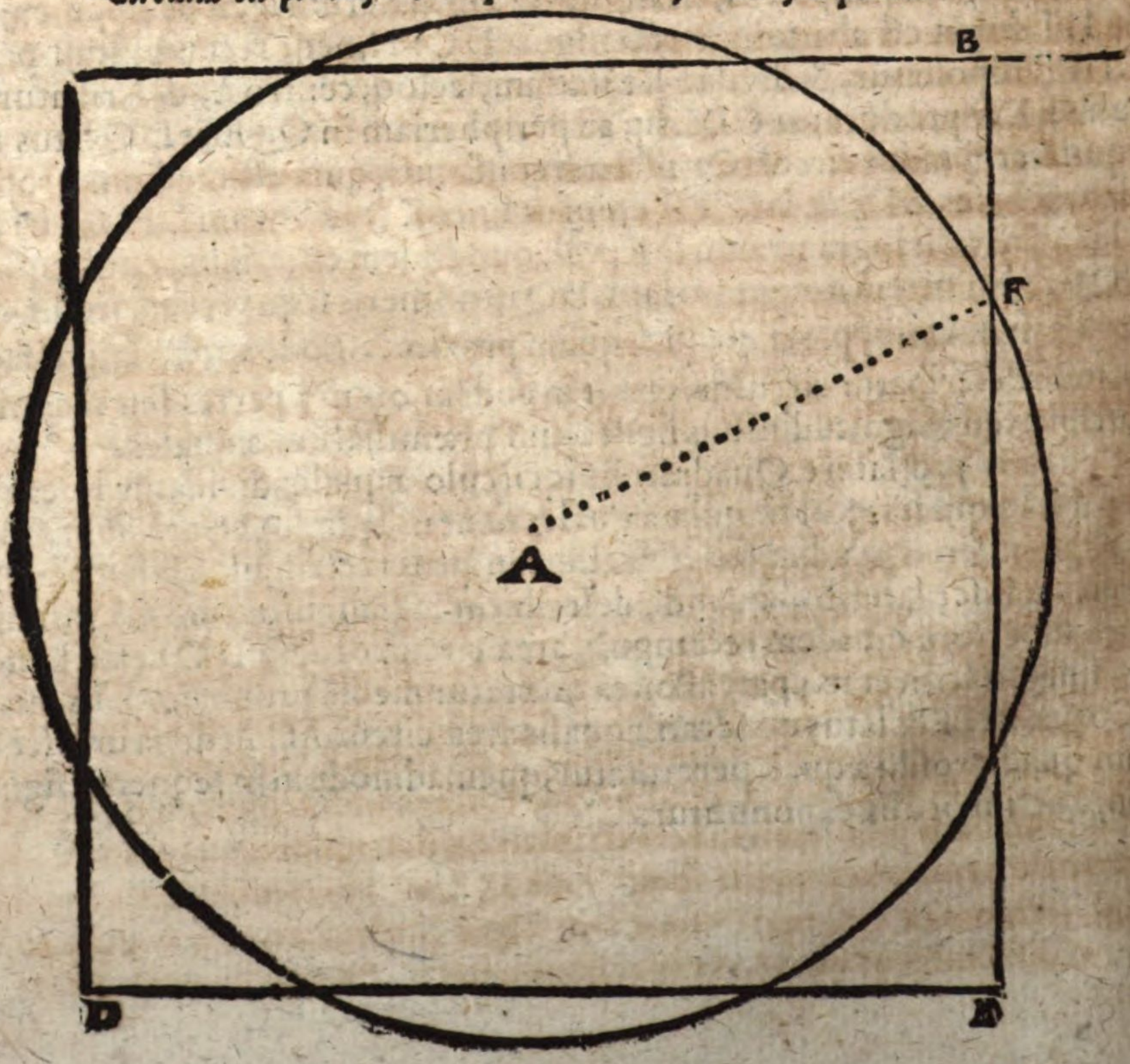
Quandoquidem mensura trianguli æquilateri à radiis circuli quadrandi constantis superius demonstratur $14\frac{1}{7}$ qualium segmentum hexagoni est part: 3 & ipse circulus 104. quocirca idem spacium $14\frac{1}{7}$ ex prioribus in rectangulo convenienter exhibetur, quando longitudo hujus ponatur $7\frac{1}{8}$ partium æqualium, ac latitudo partium 2 earundem. Etenim ex harum multiplicatione in sese oriuntur $14\frac{1}{7}$ pro area talis rectanguli, cujus latera sunt circuli radii. Talè autem rectangulum sit CDFE in figura præsente. Posteà basi ejus FD infinitè eductâ, vel potius antea super eadem linea FK infinitè utrinq; producta, describatur juxta Lemma superius, triangulum æquilaterum DIK, quippe cujus altitudo HI dupla est altitudinis rectanguli DC: Hincq; rectangulum præmissum CDFE adponatur, & divisa FK bifariam, factoq; centro A, describatur semicirculus FK & producatur CD usq; ad peripheriam in Q. Erit DQ latus trianguli æquilateri à radiis circuli Quadrandi constituti, quia est medium proportionale inter bases ED, & DK. Est enim ut linea KD ad lineam DF: Sic triangulum KID ad parallelogrammum DF; vel, quod idem est, triangulum æquilaterum DQG. Idem autem inuentum latus DQ in numeris si quæretur, prodit $\surd\surd 1095\frac{2}{7}$ hoc est, in solutis 5 part: $45\frac{1}{8}\frac{1}{0}$ M. quam proximè. Eodē autem latere facto radio quando describatur circulus, erunt in eodem omnes partes seu magnitudines, partibus seu magnitudinibus figurarum præmissarum æquales. *Prop. 2. hujus.* *Prop. 2. hujus, &c.*

Porrò pro latere Quadrati huic circulo æqualis, dividatur linea recta CD in partes æquales 13, ut singulæ æquales fiant iis, quæ superiore figura sunt expositæ: Deinde perpendicularis seu alterum latus rectanguli AD fiat part 8. earundem; Ex hisce lateribus quando describitur rectangulum AB CD, fit area in figura superiore ejusdem rectanguli, areæ circuli è radio DQ describendi æqualis, singulæ scilicet 104 part: Postea quæratur media proportionalis inter CD & BC, quæ est EF & latus quadrati æqualis areæ circuli AC. Atq; ita in hisce circulus cum quadrato sibi æquali permutatur, quemadmodum in sequente figura ambo conjunctim oculis exponuntur. *Prop. 13. l. 6*

Circum-



Circulus ex præmissis, cui quadratum adjectum est æquale.



Sic nimirum è ſecundo *æquationis* modo, continuâ proportione ſpatiorum ſeu figurarum intra circulum velut medio quodam in natura adhibitâ, *Tetragoniſmus* iterum in eadem planè menſura, quâ prius, ſe nobis oſtendet. Ne autem ullus, qui veritatem diligit, quidquam in eo adhuc deſideret, ecce aliam & quidem tertiam viam ab hiſce planè diverſam ad ejusdem oſtenſionem ingrediemur.

CAP. X.

Tertia æquationis ratio, quâ mediante Lunulâ trigonicâ in comparatione cum triangulo æquilatero inſcripto &c. Circulus tertiò quadratur, & ſimul peripheria ejusdem, reſpectu lateris trianguli æquilateri inſcripti, in vera ſua menſura exactè determinatur: Cum appendice de inſcriptione partium in circulum, juxta magnitudines ad invicem.

HÆc autem ratio ſeu hic tertius inveniendi *tetragoniſmi &c.* modus uno Problemate abſolvitur, quod tale eſt:

PROBLEMA.

Veram & nativam Cyclometriam, tàm quod ad aream circuli quàm peripheriam, ſuper una æquatione Algebraica abſolvens, & in aſpectum producens, hâc propoſitionum formâ.

PROPOSITIO I.

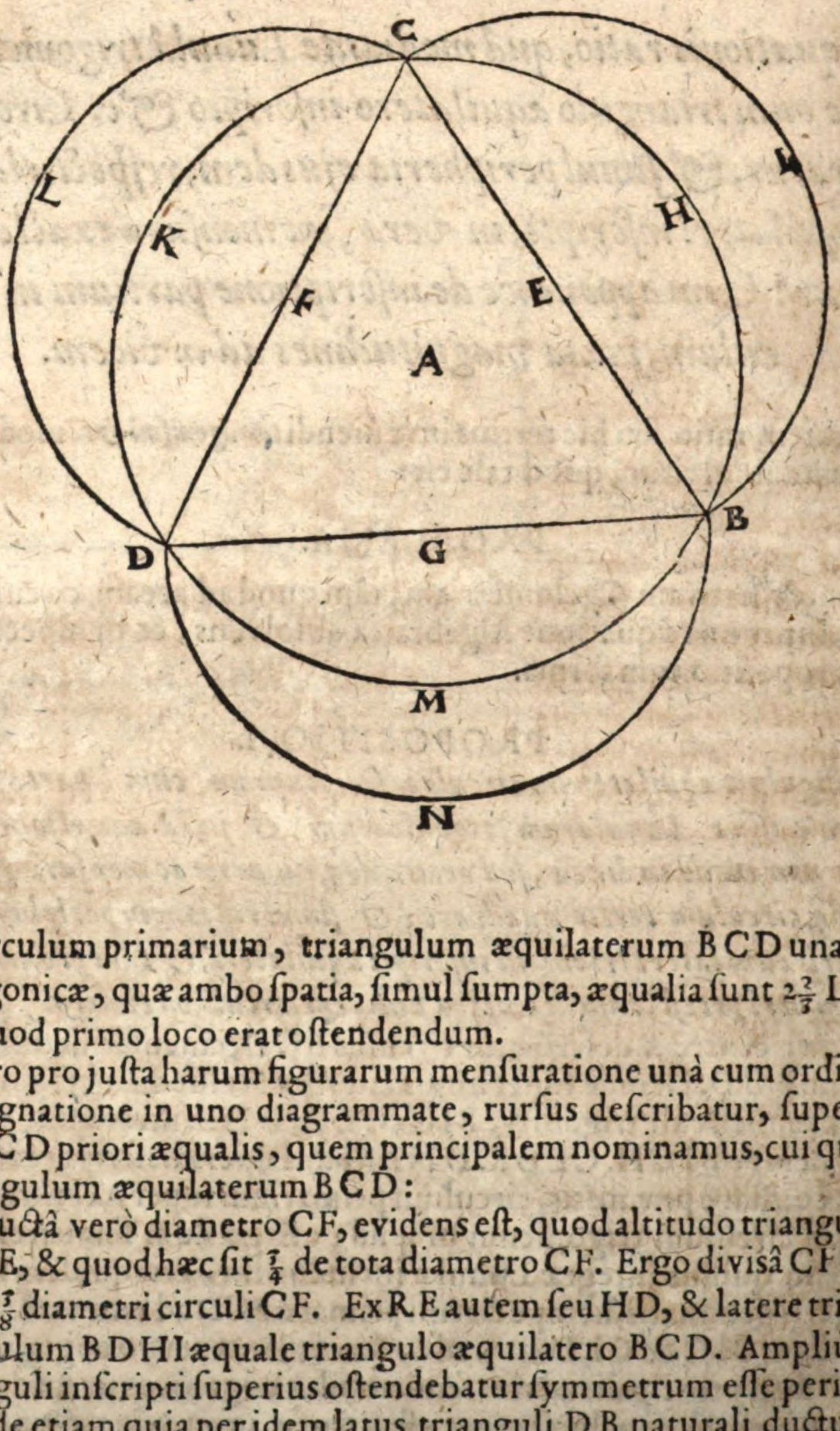
Triangulum æquilaterum circulo inſcriptum una cum $\frac{1}{3}$ parte ſectionis trigonicæ æquale eſſe $2\frac{2}{3}$ Lunularum trigonicarum; & juſtâ æquatione accedente, hæc omnia non modò in lineis, ſed veris quoq; numeris ac menſuris ſuis determinare, adeoq; circulum tertiò quadrare; & ſimul rationem peripheriæ circuli in veris numeris cum latere trianguli inſcripti æquilateri, & tàm proximè, quàm ab ullo unquam fieri poteſt, cum diametro ejusdem circuli oſtendere.

Super centro A deſcribatur circulus B C D, cui inſcribatur triangulum æquilaterum B C D. Deinde ſuper hujus lateribus velut diametris rurſus deſcribantur tres ſemicirculi trigonici, B I C, C L D, D N B: unde quoq; tres Lunulæ trigonicæ, nempe B I C H. C L D K. D N B M unâ operâ deſcripta exſtant. Primò igitur quia conſtat è præmiſſis, circulum primarium ſuper A centro ſeſe habere ad integrum circulum trigonicum ut 4 ad 3; Ergo dum ſemicirculi trigonici ſumuntur, in quibus integræ Lunulæ includuntur, erit quidem ratio eadem, ſed in numeris geminatis, nempe circuli primarii B C D ad binos trigonicos ſemicirculos ſcilicet B I C & C L D ut 8 ad 6, & accedente tertio trigonico D N B, erit ratio circuli dicti principalis ad tres ſemicirculos trigonicos ut 8 ad 9. Proinde $\frac{1}{8}$ in circulo primario æqualis ſemper eſt $\frac{1}{6}$ partis in circulo trigonico, ad quem Lunulæ trigonicæ deſcriptæ pertinent. Quæ quidem æqualitas duarum quantitatum diſsimilibus numeris expreſſarum in futuræ æquationis uſum ſervetur. *Lem: 1. 6. 5.*

Amplius,

Amplius, quia valor circuli primarii C D B expositus est per numerum 8; Sed trium semicirculorum, in quibus tres Lunulæ, & totidem sectiones trigonicæ conspiciuntur, in numero 9: Quocirca evidens est, circulum illum principalem æquare $2\frac{2}{3}$ Lunulis trigonicis super centro A; & ideò remotis utrinq; totidem sectionibus trigonicis, nempe B H C E. C K D F. & $\frac{2}{3}$ de D M B G remane-

Axiom. 3. l. 1.



re intra circulum primarium, triangulum æquilaterum B C D una cum $\frac{1}{3}$ sectionis trigonicæ, quæ ambo spatia, simul sumpta, æqualia sunt $2\frac{2}{3}$ Lunulis trigonicis; quod primo loco erat ostendendum.

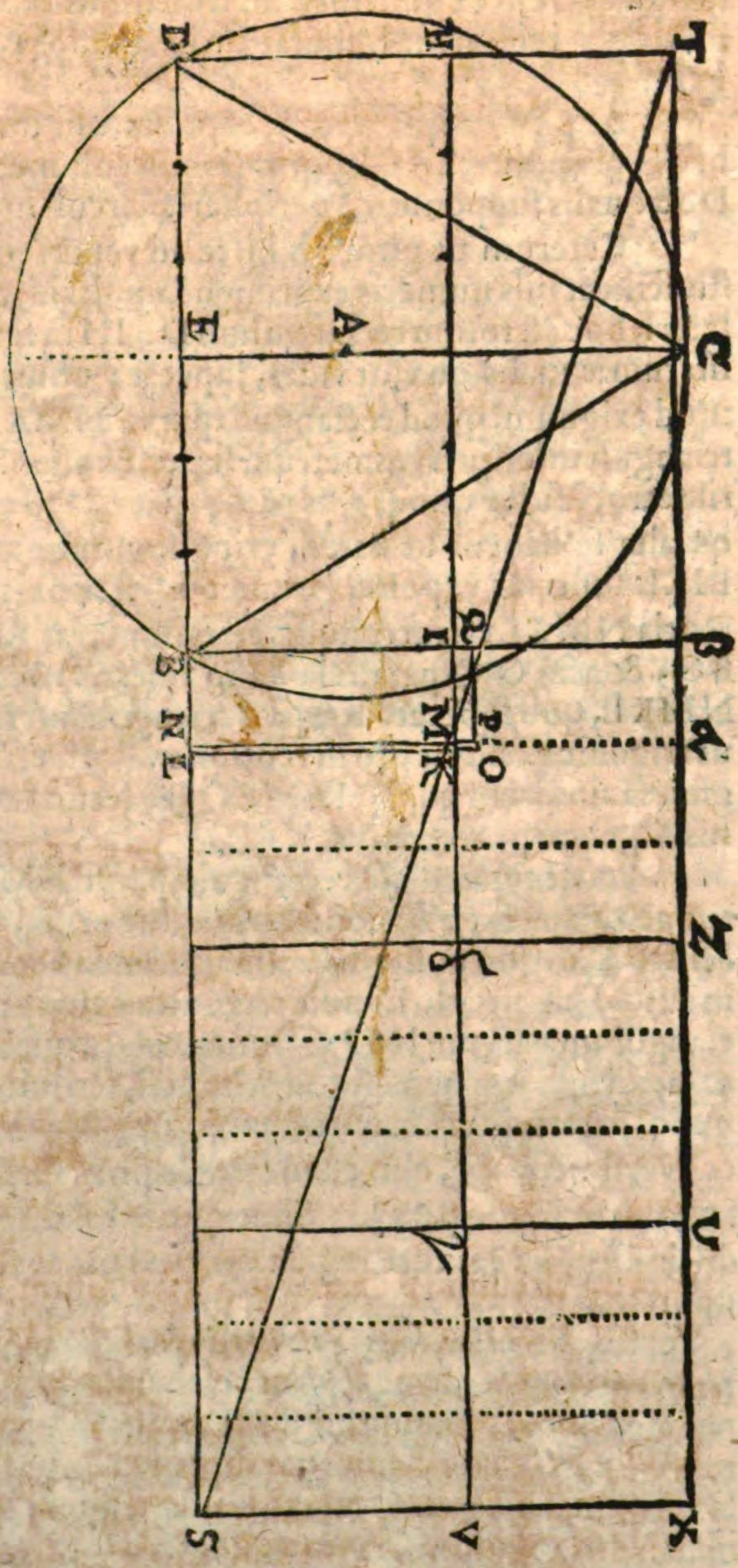
Porro pro justa harum figurarum mensuratione unà cum ordinata singularum adsignatione in uno diagrammate, rursus describatur, super A centro, circulus B C D priori æqualis, quem principalem nominamus, cui quoq; inscribatur triangulum æquilaterum B C D:

Ductâ verò diametro C F, evidens est, quod altitudo trianguli inscripti B C D sit C E, & quod hæc sit $\frac{3}{4}$ de tota diametro C F. Ergo divisâ C F bifariam in R, erit R E $\frac{3}{8}$ diametri circuli C F. Ex R E autem seu H D, & latere trianguli D B, fit rectangulum B D H I æquale triangulo æquilatero B C D. Ampliùs quia D B latus trianguli inscripti superius ostendebatur symmetrum esse peripheriæ circuli; deinde etiam quia per idem latus trianguli D B naturali ductu continuatur latus alterum, quod cum adsumpta in diametro ratione rectangulum constituit areæ circuli æquale; & hæc pars diametri nempe R E concessa est totius $\frac{3}{8}$

Prop. 1. c. 5.

sequi-

Sequitur ergo, quod de tota perimetro requiratur pars $\frac{2}{7}$ ad tale rectangulum constituendum. Proinde ad hanc perimetri mensuram $\frac{2}{7}$ prorogetur D B in S. saltim συμπαχανῶς, ut scilicet D S $\frac{2}{7}$ fiat circumferentiæ circuli principalis super centro A descripti, æqualis nimirum peripheriæ in eo B C D ex hypothesi, unde & ex D H fit rectangulum D S V H æquale areæ circuli hujus. Quũ igitur hujus pars nimirũ B S V I in tres principales partes æqualiter dividatur, per notas I ∫ γ V; proveniunt intra singulas harum, singulæ sectiones trigonicæ trium, quæ in circulo hoc, atq; superiore æquali exstant, inibi characteribus insignitæ B H C E. C K D F. D M B G. Quæ quandoquidem cum triangulo æquilatero inscripto & in rectangulum D B I H redacto aream totius circuli primarii itidem comprehendunt, igitur omninò ut in circulo eodem cum dicto triangulo inveniuntur hêic contiguæ, illic circa triangulum dispositæ: ut hæc ad oculum apparent. Quoniam autem superiùs modò ostensum est, quod $2\frac{2}{7}$ semicirculi trigonici æquales sint circulo principali proposito B C D, proinde rursus singulæ hæ tres sectiones trigonicæ, in tres quoq; æquales particulas distinguantur (ut hêic vides) quarum una B I M N trianguli inscripti mensuræ B D H I adjectâ, & postea diagonio S T ab S per M ductâ atq; productâ, donec occurrat D H similiter producta in T; & tandem actâ T X parallela & æquali H V, palam est, & ad oculum perspicuum, quod scilicet in rectangulo M a X V mensura $2\frac{2}{7}$ Lunularum trigonicarum includatur, æqualis scilicet triangulo æquilatero inscripto cum $\frac{1}{7}$ sectionis trigonicæ intra rectangulum D N M H, omninò ut antea ipsorum æquatio in



Prop. 43. l. 1.

tio indicata est, ex quo lineæ ab æqualibus sectionum trigonicarum distinctionibus per regionem Lunularum hêic emissæ, hasce simul ordine interstinguebant.

Atqui hæc quadratura expositarum magnitudinum in schemate priore hujus propositionis adeoq; ipsius circuli mechanica est, ex ea hypothesi, qua D S æqualis supponitur $\frac{2}{3}$ peripheriæ circuli super A centro descripti.

Ceterum ut nunc ab hisce ad veram circuli mensuram ascendamus, justis scilicet suis numeris exprimendam, dividatur basis mensuræ trianguli æqui-
Prop. 2. l. 6. lateri, hoc est totum rectangulum D B I H in sex partes æquales, & B I K L sit unius earum æqualis, quæ, ut vides, superat $\frac{1}{3}$ unius sectionis trigonicæ per spatium
Prop. 1. c. 5. istud exiguum, quod rectangulo parvo N M K L includitur. Quia verò latus
Axiom. 2. l. 10. trianguli inscripti symmetrum superiùs ostensum est circuli, cui inscribitur, perimetro, & ideo quoq; ejus pars $\frac{2}{3}$ quæ est D S; porrò quia parallelogramma æ-
Prop. 1. l. 6. quialta se habent ut bases, erit quoq; trianguli dicti sexta pars in rectangulo B I K L superiùs expositæ symmetra $\frac{1}{3}$ sectionis trigonicæ B I M N; & ideo differentia N M K L etiam reliquis est symmetra. Ampliùs ductâ à B per M diagonio
Axiom. 3. lib. 10. B O, & actâ O Q parallela K I in lineam I β, fit I M P Q æquale complemento
Prop 43. l. 1. N M K L, quo superat sexta pars trianguli inscripti tertiam partem sectionis unius trigonicæ. Nunc pro inventione valoris rectanguli parvi N M K L, cui in regione Lunulari æquale est I M P Q ita secundum generalem regulam æquationis Algebræ procedemus.

Ponatur pro dicto rectangulo parvo N M K L *una radix*: deinde considerentur ac rursus inter se conferantur, ut prius, circuli, nempe principalis super centro A, in quo posita *radix* illa enodanda venit; & trigonicus circulus, nempe in cujus semicirculo Lunula trigonica descripta exstat, & cujus particula est rectangulum parvum I M P Q positæ *radici* æquale. Hi autem circuli prius in ratione ad invicem quæ est 8 ad 6, hoc est, sesquitertia, deprehendebantur, & ideò quoq; partes ipsorum seu unitates, ut $\frac{1}{8}$ & $\frac{1}{6}$ in eadem ad invicem sunt ratione, conversim nempe, quæ est in circulo principali, vel de ipso toto pars $\frac{1}{8}$, ea est in trigonico circulo pars $\frac{1}{6}$. Sunt igitur hæ magnitudines æquales, sed numero dissimiles, ut eas fore regula *æquationis* monet; Illud est quod primò notum esse
Postul. n. c. 8. oportet.

Vieta cap. 8. in artem Analyt. Porrò *quum radix, de qua quæritur, in sua basi consistens datæ magnitudini homogeneæ comparatur, aquatio est simplex absolutè*, ut celeberrimus *Franciscus Vieta* observavit. Hæc autē *radix* seu hoc rectangulum N M K L, cujus valor quæritur, in tali planè conditione reperitur, consistens nimirum super sua basi N L, comparatur datæ magnitudini homogeneæ, qua nempe tres Lunulæ trigonicæ cum tribus sectionibus hexagonicis, ac triangulo inscripto æquilatero superius commensurabiles esse ostende-
Prop. n. c. 6. bantur, quibus etiam ipsa radix (seu rectangulum N M K L) commensurabilis exsistit, ut antea prolatum est in hac propositione; Sequitur ergo, quod hæc præsens *æquatio* & inquisitio valoris *radicis* expositæ primò simplex sit, deinde synthetica, hoc est, quæ multiplicatione datarum magnitudinum similium, sed numeris dissimilium; nempe $\frac{1}{8}$ & $\frac{1}{6}$ in sese, absq; reductione & transmutatione terminorum, quæ implicatis æquationibus ceteroquin adhiberi debent, statim in facto elucet nempe $\frac{1}{48}$.

Etenim

Etenim hæc ſimplex *æquatio* eſt, quando factum ex æqualibus magnitudinibus ſub numeris in æqualibus, & valor *radicis* propoſitæ inter ſe convertuntur ſeu una magnitudo fuerint. Porro & hæc abſoluta *æquatio* eſt, quæ homogeneam ſeu ſymmetram magnitudinem ubiq; ſupponit, ac precium radicis tandem in eadem ſymmetria exponit.

Applicatio autem & explicatio talis *æquationis* in eo conſiſtit, quod Lunulâ trigonicâ mediante, unitates in parallelogrammis D H M N, & huic æquali M V X α per numerum ſuum cenſeri poſsint. Quæ enim eſt ratio *radicis* unius ad $\frac{1}{8}$, nimirum valorem circuli, in quo *radix* unitatis in parallelogrammo N M K L, exſtat, eadem reciprocè eſt ratio $\frac{1}{6}$ valoris circuli trigonici, in quo Lunula trigonica deſcripta eſt, ad $\frac{1}{48}$, hoc eſt, unitatem unius Lunulæ. Quemadmodum enim $\frac{1}{8}$ & $\frac{1}{6}$ ſunt magnitudines eædem ſub diverſis nominibus: Sic 1 & $\frac{1}{48}$ etiam quantitates eædē ſunt ſub diverſis nominibus, & rectangulū ex hiſce nempe 1 & $\frac{1}{48}$ æquale rectangulo ab iſtis quippe $\frac{1}{8}$ & $\frac{1}{6}$; Et ut ſecundum monada ſeu unitatem *radicis* propoſitæ totum parallelogrammum D N M H æſtimatur; ſic ſecundum productum, quippe $\frac{1}{48}$, fit æſtimatio ſingularum Lunularum, quæ numero ſunt $2\frac{2}{7}$ ac parallelogrammo M V X α incluſæ. Quia ergo $\frac{1}{48}$ una particula unius Lunulæ trigonicæ evadit, conſequens eſt, quod tota Lunula trigonica ſit part: 48. Amplius quia Lunulæ unius menſura intra rectangulum I ß ζ ∂ comprehenditur, eſt igitur ejus tertia pars I ß α M 16 part: quarum una particula includitur parvo rectangulo I Q P M. Porrò datâ menſurâ in numero unius Lunulæ trigonicæ 48 part: quoniam $2\frac{2}{7}$ ejusdem generis Lunularum æquales ſimul ſunt menſuræ trianguli æquilateri inſcripti D B I H, una cum $\frac{1}{7}$ ſectionis trigonicæ nempe B I M N; Igitur ob inventam menſuram unius Lunulæ in numero 48, fit menſura $2\frac{2}{7}$ Lunularum 128 part: earunden: Erit proinde eadem menſura rectanguli D N M H, cui incluſum eſt triangulum æquilaterum inſcriptum cum $\frac{1}{7}$ ſectionis trigonicæ nempe 128 part: quibus monade in parvo rectangulo L K M N adjectâ, efficitur ſumma totius parallelogrammi D L K H. 129. part: quâ per 7 divisâ (ſiquidem D L in ſeptem æquales partes diremta exſtat) oriuntur pro ß L K M $\frac{1}{8}$ trianguli inſcripti, $18\frac{7}{7}$, & ideo pro toto triangulo intra rectangulum D B I H comprehenſo, $110\frac{4}{7}$. Rurſus de rectangulo B I K L $18\frac{7}{7}$ demtâ unitate, pro parvo rectangulo L K M N, relinquuntur pro rectangulo B I M N, quippe pro tertia parte unius ſectionis trigonicæ $17\frac{7}{7}$. Et quia N I & M ß parallelogramma ſunt ſub eadem altitudine, habent igitur ſe ad invicem ut baſes B I & I ß *Prop. 1. l. 6.* & contrà. Sed M ß $\frac{1}{7}$ unius Lunulæ antea inventa eſt part: 16; Eſt igitur proportio B I ad I ß, hoc eſt $\frac{1}{7}$ unius ſectionis trigonicæ ad $\frac{1}{7}$ unius Lunulæ trigonicæ ut $17\frac{7}{7}$ ad 16. Quum autem triplentur $17\frac{7}{7}$ fit tota ſectio trigonica $52\frac{2}{7}$ & tres ſectiones quæ parallelogrammo B V includuntur, $156\frac{6}{7}$. Quibus præmiſsâ trianguli inſcripti menſurâ B I $110\frac{4}{7}$ adjunctâ, conflatur pro totius circuli area numerus $267\frac{1}{7}$, qui etiam menſurat baſin D S nempe $\frac{3}{7}$ peripheriæ circuli propoſiti. Illa demum per dimidium ſui auctâ, exſurgit tota peripheria $401\frac{4}{7}$, qualium latus trianguli inſcripti D B fuit, $110\frac{4}{7}$. & proinde factâ diviſione lateris trianguli D B in totam peripheriam deprehenditur illud in hac $3\frac{3}{4}\frac{7}{7}$ vicibus contineri: Hoc eſt, latus trianguli in minimis numeris integris eſt ad peripheriam totius circuli ut 43 ad 156, ſed quia baſis ejusdem trianguli ſe habet ad baſin peripheriæ $\frac{3}{7}$ ut $110\frac{4}{7}$ ad $267\frac{1}{7}$

factâ igitur & hêic divisione, provenit harum basium ratio in numeris $2\frac{18}{43}$ in qua quoq; ratione est ipsum inscriptum triangulum æquilaterum B C D, cum circulo, cui inscribitur B C D, hoc est, in integris numeris ut 43 ad 104; omninò ut in aliis præmissis duabus *æquationibus* per bina proxima præcedentia capita peractis, circuli magnitudo, trianguli inscripti respectu, è natura continuæ trium proportionis inventa est. *Tertiò igitur circuli quadraturam in apertum produximus, ac simul hêic peripheriæ atq; lateris trianguli æquilateri inscripti rationem inter sese exputavimus.* Quâ inventa non est difficile rationem peripheriæ ad diametrum ejusdem circuli tàm proximè, quàm ab ullo unquam homine fieri potest, ostendere. Posita enim diametro circuli 2 part: fit latus inscripti trianguli æquilateri $\surd 3$. Jam proportione inversâ ut $\surd 3$ ad $3\frac{37}{43}$: Sic 2 ad $\surd \frac{18252}{1849}$: quo numero siphrarũ farragine aucto, atq; resoluto, provenit in solutis numer. ratio illa $\frac{31418596044}{10000000000}$ &c.

Prop. 1. l. 9.

Convenientia inventæ magnitudinis circuli cum superioribus.

Vide cap. 3. hujus tractatus. Quæ certè mensura peripheriæ ad diametrum paullo infra media inventa Archimedea strictè ab Epilogismis ejus deducta, se nobis ad votum sistit.

Sed & in irrationalibus problema antecedens solvere placet hoc modo: Primò, quando ponitur pro radio circuli A C pars 1. erit ipsum triangulum inscriptum B C D, vel ei æquale rectangulum H I B D $\surd \frac{27}{16}$, cujus sexta pars, quippe rectangulum B I K L est $\surd \frac{27}{576}$ & additum $\surd 1\frac{47}{64}$ cujus mensuræ est rectangulum H I L D. Porrò cum parvum rectangulum K L M N, seu I M P Q superiùs inventum sit $\frac{1}{48}$ unius Lunulæ trigonicæ; eo igitur ad $2\frac{2}{3}$ Lunulas, hoc est, rectangulũ M V X a addito fit summa $\frac{43}{16}$ Lun. Qui numerus juxta superiorem æquationem priori $\surd 1\frac{47}{64}$ æqualis est. Proinde dum unius harum Lunularum mensuram quærimus est, ut:

$$\frac{43}{16} \text{ ad } \surd \frac{147}{64} \text{ sic 1. ad } \surd \frac{588}{1849}.$$

Est igitur quantitas unius Lunulæ trigonicæ $\surd \frac{588}{1849}$. qua sublata à parte $\frac{2}{3}$ trianguli æquilateri inscripti, seu triangulo rectangulo, cui ambas Lunulas, nempè trigonicam & hexagonicam includi superiùs ostendimus, cujusq; mensura est $\surd \frac{3}{4}$, provenit Lunula hexagonica toties optata $\surd \frac{675}{7396}$: Quæ triplicata fit $\surd \frac{6075}{7396}$. ablata verò à semihexagono inscripto, nempè $\surd \frac{27}{16}$ reliquum facit semicirculum $\surd \frac{45563}{7396}$ & ideo totum circulum $\surd \frac{45563}{1849}$ cujus quia subdupla ratio est diametri ad peripheriam, erit ista $\surd \frac{18252}{1849}$ per omnia ut prius.

Prop. 4. c. 6.

In minoribus autem numeris proximè minor est ratio peripheriæ ad diametrum circuli $3\frac{16}{71}$, seu ut 1351 ad 430. Factâ enim peripheriæ numeri $\surd 1825200$ resolutione, deest pro radice 1351 in præmisso quadrato numero, tantum una unitas. Potest igitur ratio hæc in *mechanicis* absq; sensibili deinceps errore usurpari, quùm longè verior sit quam Archimedea illa $3\frac{1}{7}$ hactenus usitata.

Ceterum ut etiam hêic sectiones circuli, quæ in superioribus æquationibus emersérunt, similiter in iisdem numeris (sicut ipsum triangulum inscriptum) redeant, primò pro sectionis trigonicæ mensura erit, ut triangulum inscriptum $110\frac{4}{7}$ ad 43: Sic una sectio trigonica inventa $52\frac{2}{7}$ ad $20\frac{1}{3}$ qualium igitur triangulum est 43, erit talium partium una sectio trigonica $20\frac{1}{3}$, & tres sectiones trigonicæ 61 part: Eodem modo pro Lunula trigonica in eadem mensura, quæ datur triangulum inscriptum 43. erit ut $110\frac{1}{7}$ ad 43, sic 48 ad $18\frac{7}{3}$. Est igitur mensura unius Lunulæ trigonicæ $18\frac{7}{3}$ part: cui adjuncta mensura unius Lunulæ he-

xagoni

xagoni ſuperius adinventæ 10 part: etiam qualium triangulum inibi repertum eſt 43 part: conſurgunt $28\frac{2}{7}$ quæ $\frac{2}{7}$ part: continent ipſius inſcripti trianguli etiã juxta ea, quæ ſuperiùs oſtenſa memini. Ut verò Lunulæ hujus inventionem hanc in paucos numeros referam, eſt, ut triangulum inſcriptum 43. ad $50\frac{1}{8}$ ſũmam ſcilicet per augmentum ſextæ ſui partis: ſic 16. ad $18\frac{2}{7}$ nempe Lunulam trigonicam inventam. *In explic. Prop 4. c. 6.*

SCHOLION

AEquationem præcedentem per cauſas ſuas latius exponens, ac demonſtrans.

Quoniam in ſuperiore contextu, dum pro parvo rectangulo K L M N, quod differentiam exhibet inter $\frac{1}{8}$ partem trianguli æquilateri B C D circulo principali inſcripti, ſeu ei æqualis rectanguli D B I H, & $\frac{1}{3}$ partem ſectionis trigonicæ B I M N, unum radicem more Algebræ aſſumſimus, & hinc abſq; ulla operoſa transactione (quam ars hæc pariter, ut & ipſa natura, reſpuit) valorem quæſitum dictæ rad: $\frac{1}{49}$ in plano produximus, & per conſequens valorem Lunulæ unius trigonicæ Q B Z δ, 48; qualium valor hujusmodi radicis utputa $\frac{1}{48}$ pars una in dicta Lunula cenſetur: tamen ut talis æquatio liquidò per circumſtantias ſuas, cunctis in hiſce mediocriter verſatis, conſtare poſsit, viſum eſt cauſas ejusdem hac uberiore declaratione ante oculos ſiſtere; præteritis iis, quæ priùs ſolidè ſatis à nobis oſtenſa ſunt, tàm de ſymmetria harum omnium magnitudinum in plano ad invicem, quàm de æquatione $2\frac{2}{3}$ Lun: trig: cum triangulo æquilatero inſcripto, huic ſcilicet $\frac{1}{5}$ parte unius ſectionis trigon: adjunctâ. Cap. 6. Cap. præſenti.

Quoniam Μηνίσκος *Geometris definitur* τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ δύο περιφερειῶν *vel;* δυὸ κύκλων μὴ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων ὑπεροχὴ κοίλης καὶ κυρτῆς; *Proinde quoq; Lunula hæc trigonica, quæ ante omnes alias ritè hèic in æquationem venit, conſtituitur à duobus circulis; uno in cujus ſemicirculo dicta Lunula formatur, ideò trigonico vocato, quia diametrum ſortitur, latus nimirum trigoni æquilateri, circulo principali inſcripti: altero, qui circulus principalis à nobis nuncupatur, quòd in hujus quadrationem potiſsimum intendimus; à cujus ſcilicet peripheria Lunula illa formam cavam gerit, ut & ſuprà & infrà in Lunulæ hujus fabrica ad oculum liquet.* Vide Vietam lib. 8. Reſp: cap. 9.

Quandoquidem igitur dicti circuli cauſæ procreantes talis Lunulæ exſiſtunt, neceſſum eſt, illam ab hiſce, velut aliud effectum à ſuis cauſis, dependere. Porrò quia in Geometria nihil generalius, nihil ſubtilius eſt aut penitius in dimenſiones variarum figurarum ſe extendit, atq; duarum magnitudinum ſub eodem genere exſiſtentium ratio ad invicem, quando ſcilicet hæ in potentiam deducuntur, quippe in qua effectum talis concretæ rationis cernitur, certè hinc efficitur, quod menſura Lunulæ præſentis penes potentiam magnitudinum horum circulorum, poſtquam ſymmetræ deprehenſæ fuerint, & ad minimos integros numeros redactæ, rectiſsimè æſtimetur.

Lem: 2. & 3. cap. 5.

Quum verò horum circulorum magnitudines ad invicem in minimis integris superiùs repertæ sint ut num: 3. ad num: 4 hoc est, in semicirculis, in quorum uno trigonico scilicet, Lunula ista fit, ut 6 ad 8, proinde $\frac{1}{6}$ pars circuli trigonici & $\frac{1}{8}$ pars circuli principalis inter se æquantur, quod obseqq: iteratò inculcatur.

Ulterius quia genesis dictæ Lunulæ causam agnoscit, magnitudinem utriusq; horum circulorum; porro quia medium proportionale duo extrema immediatè ligat; ergo hæc Lunula nostra tanquam medium quiddam producitur; multiplicatis scilicet inter sese circulorum horum magnitudinibus primis, quæ suprà sunt expositæ atq; semicirculis accommodatæ, nempe 6 & 8; siquidem omnes binæ magnitudines vel numeri in se ducti, medium proportionale velut effectum in facto ponunt: Quod licet ab utroq; extremo esse suum participet, ut effectum à causis propriis; heterogeneum tamen ab illis est, seu in potestate climactica, ut Vieta *loquitur, hoc est, plani naturam induit, quando extrema, quæ causæ sunt, laterum rationem sortiuntur; sic 2 & 3 inter se multiplicati medium producunt 6, ab ipsis planum ac heterogeneum; interim autem modò termini extremi 2 & 3 singuli quadrentur, & ordine locentur, stabit proportio continua 4. 6. 9. trium terminorum, & ut 2 ad 3, sic 4 ad 6, & sic 6 ad 9 nempe in ratione sesquialtera.*

Nec tamen semper latera, seu lineas rectas fore illa extrema necesse est, dum sic transiguntur. Etenim quæ in lineis rectis locum habent comparationes, eadem ad radices quascunq; simplices, planas, solidasve, aut ulterioris ordinis homogeneas possunt aptari.

Vide F. Vieta in recognit; æquat: cap. 3.

Ut igitur rem hîc concludamus; quandoquidem Lunula trigonica, cujus valor ex valore partis unius ejusdem dependet, medium proportionale erit, inter magnitudines reductas circulorum istorum ad invicem, quorum duntaxat Lunula est, nec aliæ ullæ causæ tanquam veræ ac legitimæ procreationi Lunulæ hujus adsignari poterint: Certè ipsa naturæ continuæ proportionis jubet (quâ & hîc juxta Platonem, plana devinciuntur) ut valorem positæ radicis adeoq; partis unius Lunulæ trigonicæ eum esse agnoscamus, quem $\frac{1}{6}$ & $\frac{1}{8}$ partes scilicet in suis unitatibus adæquatæ, ac in se ductæ constituunt, nempe $\frac{1}{48}$; & per consequens Lunulæ ipsius valorem 48, qualium circulus principalis ex hac ratiocinatione evadit $267\frac{3}{7}$ trigonicus verò $200\frac{4}{7}$. quorum ratio in minimis integris est ut 4 ad 3.

Vide infr. c. 7

Observatu autem dignum est, ad hujus rei veritatem ulteriùs dijudicandam, quod, quamvis variis modis valor radicis adsumtæ prorsus idem elici possit: tamen omnes huc recidunt, ut rationes, quæ in magnitudinibus contractis ac expositis horum circulorum ad invicem vigent, à quibus Lunula hæc trigonica unicè formata est, causas talis æquationis proferant, & per ipsam Lunulam velut effectum diffundant: Sicut hæc proportio: ut $\frac{1}{8}$ ad suum quad: $\frac{1}{64}$: sic $\frac{1}{6}$ ad ($\frac{1}{48}$ & versâ vice, ut $\frac{1}{6}$ ad suam potentiam $\frac{1}{36}$ sic $\frac{1}{8}$ ad ($\frac{1}{48}$ valorem radicis positæ.

Neq; enim nisi per accidens contigerat, quod olim hæc proportio; ut $2\frac{2}{3}$ Lun: trig: ad $\frac{1}{3}$ Lunulæ ejusdem: sic $\frac{1}{6}$ ad ($\frac{1}{48}$, valorem verum rad: exposuerit, nam quæ est ratio $2\frac{2}{3}$ ad $\frac{1}{3}$, eadem est 8 ad 1. unde idem provenit per dispositionem

horum

horum terminorum in regula proport: 8-1-$\frac{1}{8}$; quod ex multiplicatione $\frac{1}{8}$ in $\frac{1}{8}$ nempe($\frac{1}{4}$. Sed rationem hujus æquationis seu valoris radicis adsumtæ reddituro æqua hæsit; quandoquidem $\frac{1}{8}$ non aliò, quàm ad magnitudinem rationalem unius partis circuli trigonici referri potuerit, ut anteâ ostensum est.

Quinetiam id argumentum manifestum satis est, quod talis ratio in magnitudinibus contractis duorum circulorum ad invicem insit, è quarum potentia Lunula hæc trigonica oritur. Modò enim dictæ magnitudines & harum unitates ad minimos integros numeros quippe $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ adstrictæ fuerint, & medium $\frac{1}{12}$, quod inde emergit, potentialiter bissectum, hoc est, per 4 divisum (quia in semicirculo duntaxat Lunula paratur, ut suprà memini) provenit idem valor radicis ($\frac{1}{48}$. Denique quod extremi termini scilicet $\frac{1}{8}$ & $\frac{1}{8}$ inter se æquati proferantur, causa est quantitas tàm quadrati in sua specie, quam lateris ejus hîc penes unam radicem determinanda, ut paullò post demonstrativè apparebit. Neq; tamen necessarium est radicis positæ valorem in quadrato tali semper exhiberi, sed potius in parallelogrammo scamnato æquipollenti, ut in superiore rectangulo parvo IP. De quare M. Michael Stiphelius commentario in Christophorum Borussum ostensivè loquitur. *Vide exemplar Vetus p. 173.*

Quod autem tanta facilitas præsenti æquationi insit, facit hîc ipsa radix super basi sua adsumta, & homogeneis comparata, ut suprà ex Vieta memini, ac ritè huic æquationi per suas circumstantias applicui. Quinetiam huc facit, quod mox in Vieta sequitur his verbis: Quum potestas radicis, de qua quæritur, pura ab affectione, datæ homogeneæ comparatur, æquatio est simplex climactica. *Vide Vietam cap. 8. in Artem Analyticam.*

Præter hæc autem, quæ de facilitate æquationum omnium præmissarum pro quadratura circuli ex arte depromuntur, credibile est, eadem ipsi naturæ inesse, quæ simplicissimo progressu suo per proportiones continuas operosam ac involutam pragmateiam, quâ hactenus à plerisq; quadratura circuli tentata est, deludit, præsertim præostensam symmetriam nacta; nam absq; hâc omnis conatus noster frustraneus fuisset, qui, eadem favente, facilimus evadit. *Vide cap. 6*

At dicis: si Lunula quævis sic media proportionalis erit, inter circulorum suorum magnitudines in minimis integris ad invicem collatas, etiam reliquas Lunulas hac praxi invenire dabitur; & per consequens, hexagonicam ad circulum quadrandum unicè hactenus expetitam. Sed responsio de facili est; siquidem nulla alia Lunula, præter hanc trigonicam, tali æquationi accommoda invenitur, qualis in figura proxima cernitur, unde ad hoc negotium expediendum Lunula hæc rectè ac feliciter assumta est. Præterquam enim quod hîc circuli quadraturam in æquatione peculiari, ut vides, absolvit, etiam seorsim per rectilineum commutata, idem præstat; quandoquidem ex hujus mensura data, postea mensura Lunulæ hexagonicæ oritur, ut suprà ostensum est, quamvis & hæc in superioribus æquationibus, quibus simul tetragonismus quæsitus ac inventus est, sese bifariam ob-

Objectio.

Responsio.

Prop. 4. c. 6. Cap 8. & 9.

Ea dabit

Reductio autem harum quantitatum ad priores inventas sola numeralis est, per maximum divisorem $2\frac{4}{7}$. seu $\frac{18}{7}$ Sic Lunula hoc loco inventa 48, reducta ad eandem è superioribus æquationibus prodeuntem 18^2, & sic pereundem divisorem $\frac{18}{7}$: Circulus principalis hêic repertus $267\frac{3}{7}$ ad mensuram ejusdem superius aliquoties inventam 104; & ita in ceteris; communi saltem divisore $\frac{18}{7}$ indigent, quando istuc reducenda veniunt.

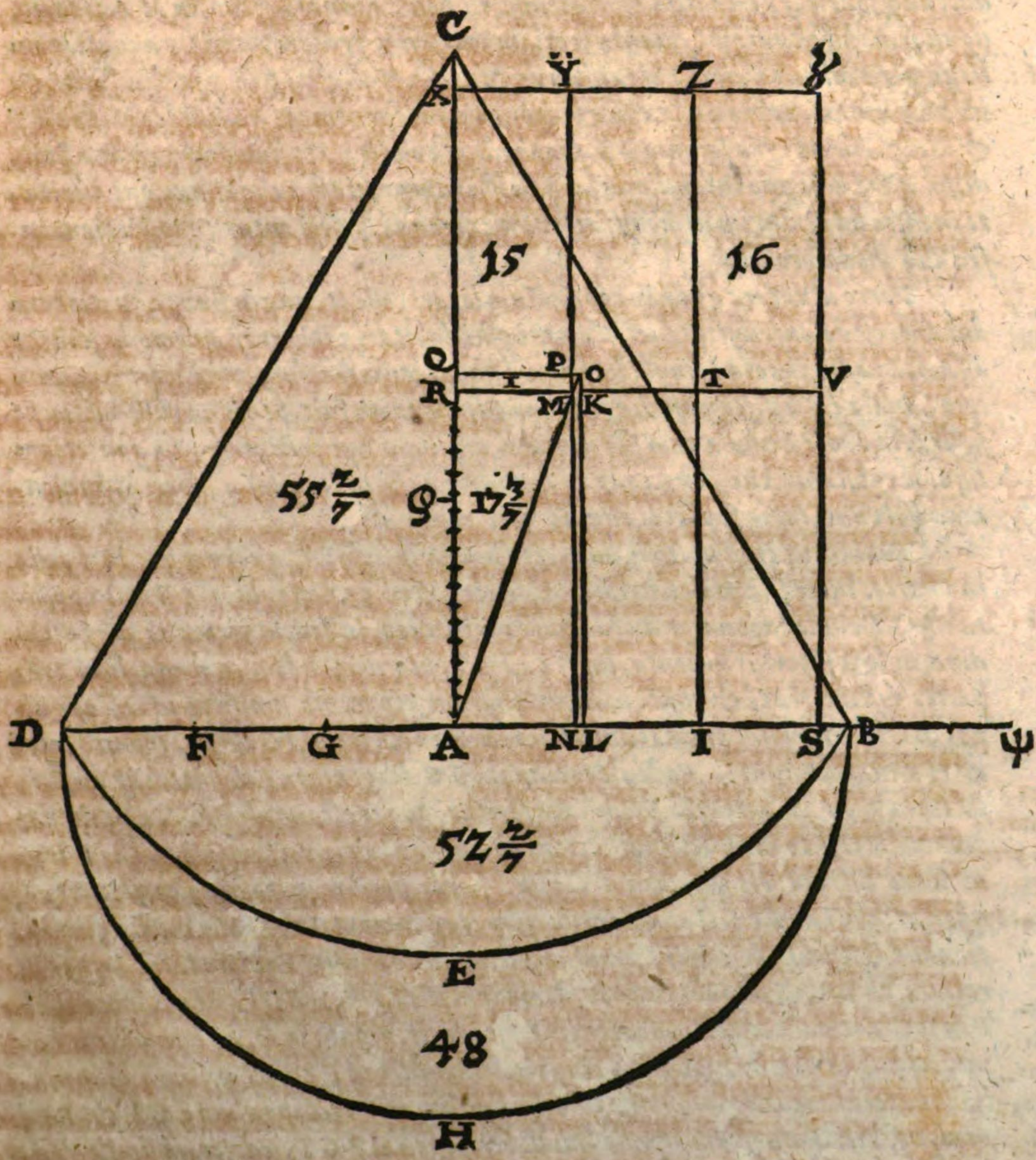
Ceterum quamquam etiam per hanc præsentem æquationem rem confecimus, & sic funem triplicatum ita nexuimus, ut futurum non sit, ulla vi eum disrumpi, vel, ut resolvatur, à quoquã tentari, nisi qui suam ignorantiã hêic prodiderit: tamen ut ante oculos hanc æquationem sistamus, & quodammodo ἐυμηχανιᾳ, in majori, quam anteà, spacio, accommodemus, sequentes figuras adjungere placuit; maximè quia illustris F: Vieta ἐυμηχανίαν etiam ante suscipiendam æquationem analystæ plurimùm commendat; nec certè frustrà: siquidem omne Geometricum etiam Mechanicum esse oportet: Quod autem conversio non semper valet, fit non ob ipsam Mechanicen, sed potiùs spacii penuriam, in quo illa exercebitur. Quod igitur in una pagina ἐυμηχανῶς hêic exhibeo, alius in spacio decuplo majore & ampliùs si exercuerit, manifestò videbit, quod quò spatium majus elegerit, haud eò minus à scopo δοκιμασίας præfixo aberrabit; quod neutiquam fieret, modò veritas æquationi nostræ non subesset. Et certum est, quod qui talem ἐυμηχανίαν fugerint numeros aversando, & suis figmentis, (ut Josephus Scaliger) adhæserint, omnes in ἔφοδον vanissimam circa hoc negotium desiverint. Sed nunc ad ea quæ sic restant.

Quoniam in superiori proximo diagrammate totum hujus æquationis negotium proposuimus, & tùm indidem, tùm hac declaratione veram esse ostendimus, proinde dum hêic spacium aliquantò majus, ad magnitudinem unius duntaxat Lunulæ &c. ἐν ἐυμηχανίᾳ delegimus, in ipsis semissibus rem absolvemus.

Primò igitur quia demonstratum est in superioris figuræ exegesi, rectangulum sequentis diagrammatis MX, quæ tertiam partem unius Lunulæ trigonicæ continet, esse part: 16, & NR rectangulum tertiam partem sectionis trigonicæ comprehendens, partium $17\frac{3}{7}$ qualium NK assumta radix vel huic æquipollens RP est pars una: Quòcirca normaliter super lineam infinitam D+ erigatur linea aliqua recta ut AR, quæ in partes æquales $17\frac{3}{7}$ dividatur, factaq; continuatione in C, ut AC dupla fiat AR, describatur super hac altitudine triangulum æquilaterum BCD, per ea, quæ suprà tradidimus. Hinc invento in linea altitudinis AC centro Φ describatur primo arcus circuli principalis BD, seu hujus peripheriæ pars tertia. Deinde centro A super diametro BD, semicirculus trigonicus BD, unde Lunula trigonica comprehensa est spacio БHDE, & proinde ab utroq; horum circulorum formata, ut aliquoties suprà in hoc scholio inculcatum est. His factis, dividatur DA semissis lateris trianguli æquilateri BD in tres partes æquales. Et postea quanta accuratione fieri potest, arcus subtensæ BD κατ' ἐφάρμοσιν in lineam rectam extendatur, quæ D+ evadit. Mox differentia inter DA semissem lateris

Prop. 43. l. 1. Per conversionem prop. 1. l. 6. Lem: 4. Pr. c. 9.

trianguli, & D♄, quæ est A♄, dividatur in 4½ seu 9/2 partes æquales. Posteà in præconstituta linea A C, sumantur per priorem divisionem partes æquales 16, unde R X constituitur; ac deinde R V, & X ♃ factis parallelis lineæ A S, quæ tres partes continebit, quarum A♄ 4½ fuerat. Quia verò tria illa segmenta A X. N I. I S. ratione baseos communia segmenta sunt & unius sectionis trigonicæ, & unius Lunulæ trigonicæ; quum ergo N Y. I Z. S ♃ parallelæ ducantur A X, ac inter seſe, sit integrum rectangulum R S æquale sectioni trigonicæ B E D A: Et rectangulum reliquum R ♃ æquale Lunulæ trigonicæ B H D E, & ideò totum rectangulum ◡A ♃ Prop. 1. l. 6.



Præsenti c. 10. c. 8. & 9. æquale totiſemicirculo trigonico B HD, per ea, quæ in ſuperioribus quidem oſtenſa ſunt, & in ſolidum etiam per collationem ſuperiorum æquationum convicta. Ceterum, ut ſimul hæc ἐν εὐμηχανίᾳ ad oculum appareant, transferatur una pars ſeu ſegmentum trium de linea A D, nempe A G in lineam A +, ſit q; A L. Deinde transferatur una pars ex linea diviſa A R in lineam R X, ſit q; illa R Q. Poſt hæc ducatur L O parallela N M, & Q T deſinens in O parallela R X; Et quoniam N R rectangulum parvum aſſumtum eſt pro una radice, cujus valor in rectangulo R T vel toto R Ξ inquirendus fuerat: Quum igitur ducatur diagonius ab A in O & ipſa exactè in omni Mechanica tractatione ſive in maximo, quod fieri poteſt, ſive quocunq; ſpacio, exerceatur, & legitimè, ut hêic, adminiſtretur, in M ceciderit, ſignum manifeſtum eſt (quantum etiam ἐυμηχανίᾳ probari poterit) æquationem

Prop. 43. l. 1. hanc veritati reſpondere: Siquidem rectangula N K, & R P ſic æqualia ſunt, & utrumq; unitatem pro una radice propoſitam in ſe continet, R P quidem $\frac{1}{16}$ de R T & ideò $\frac{1}{48}$ de integra Lunula R Ξ quæ ob id 48 evadit. Sic ſimul ἐυμηχανῶς oſtenditur, quod hêic unà intendimus, atq; in iſtorum gratiam, reliquimus, qui veritate in hiſce ad ocularem demonſtrationem exigendâ delectantur, quod etiam infrà aliò modo prodit.

Probl. 1. c. 11. & alibi. Porrò ut cetera quoq; in conſpectum locari poſſent, quæ in hanc æquationem ducunt, & de quorum intellectu à nonnullis dubitari videretur, quomodo ſcilicet aſſumta radix in tota Lunula hac unum quadratum ſpacium contineret, qualium ipſa Lunula eſt 48, ſequens diagramma adjiciendum fuit, penes quod reductio fit figuræ, inventæ Lunulæ cum ſua unitate, ad aliam æquipollentem, in qua etiam liquidò conſtabit, cur $\frac{1}{8}$ & $\frac{1}{6}$, quæ æquationem hanc juxta cauſas ſuperiùs indicatas abſolvunt, inter ſe partes æquales fore conveniat.

Sumantur ergo ut cunq; duæ rectæ lineæ, A B & B C, quarum hæc in 8, illa in 6 partes inter ſe æquales dirimatur, unde poſteà rectangulum A B C G conſtituatur. Deinde exponatur dicta Lunula trigonica, in eadem forma ac magnitudine, ut hêic ſuperiùs inventa, ſuper baſi G P, ſit q; illa G P H I, cum æquali in tres partes diſtinctione, & unitate in una harum apparente ſimiliter in rectangulo parvo G V X Y. Hinc protrahantur lineæ rectæ H I, item A G & B C infinitè, ſed

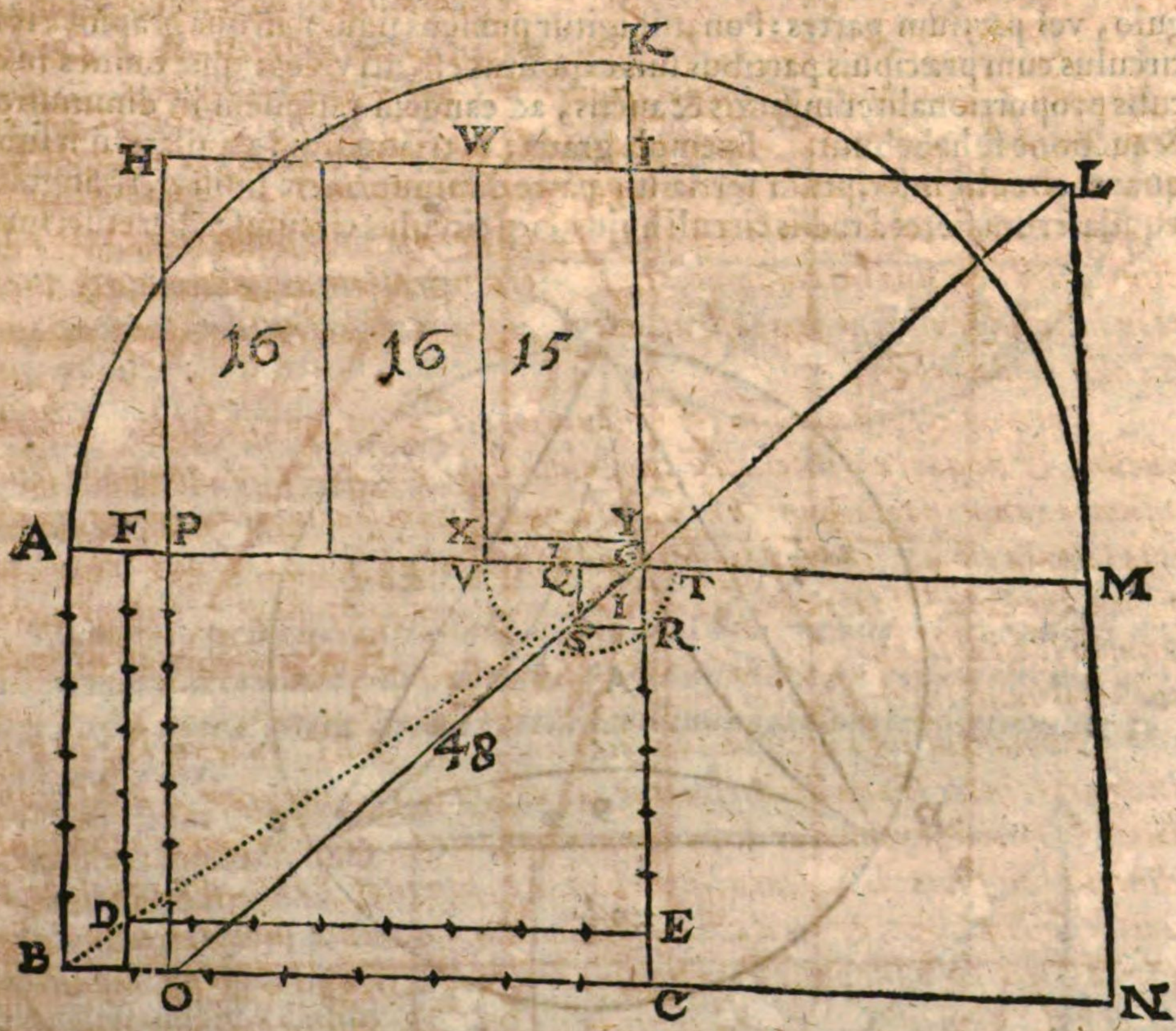
Prop. 43 lib. & H P deorſum in O. Poſteà continuatâ O G diagonio in L demittatur ab L in N linea L M N parallela I C, unde efficitur, quod rectangulum G N æquale fiat

Prop. 13, l. 6. Lunulæ H G, in eadem altitudine, cum aſſumto ab initio rectangulo A C. Igitur ut intra dictum rectangulum A C aliud ſimile ſimiliterq; poſitum conſtituatur, quod etiam Lunulæ H G æquale erit, quæratur inter A G & G M, media proportionalis G K & huic æqualis ponatur G F: quare eadem G F unum latus erit talis rectanguli Lunulæ æqualis futuri. Deinde actâ diagonio B G, quæ ubi lineam ab-

Hæc reductio abſolvitur ut plurimum, prop 25. lib. 6. Elem: F in B C normaliter deſcendentem interſecuerit, utputa in D, alterum latus hujus rectanguli determinat penes magnitudinem lineæ F D. Nam quia diagonalia ſunt toti parallelogrammo & inter ſe ſimilia, erit rectangulum è G F & F D, nempe F D E G non ſolum æquale Lunulæ expoſitæ H P G T, ſed etiam ſimile ſimiliter

liter positum cum rectangulo ABCG. Dividatur ergo rursus DE in 8 partes aquales, quarum FD seu GE fiunt 6, unde totum rectangulum F E rursus datur 48, quarum quadratum ☐R est pars una, cui etiam æquale est, ut vides, rectangulum parvum G X, anteà pro valore unius radicis inventum atq; expositum. Prop. 14. l. 2.

Habes igitur unum radicem in suo quadrato, cujus latus G R quoq; est unitas; & totam Lunulam reductam ad 48 unitates, ne amplius quidquam in hac æquatione pro intellectu præmissorum æquum & attentum Lectorem remoretur.



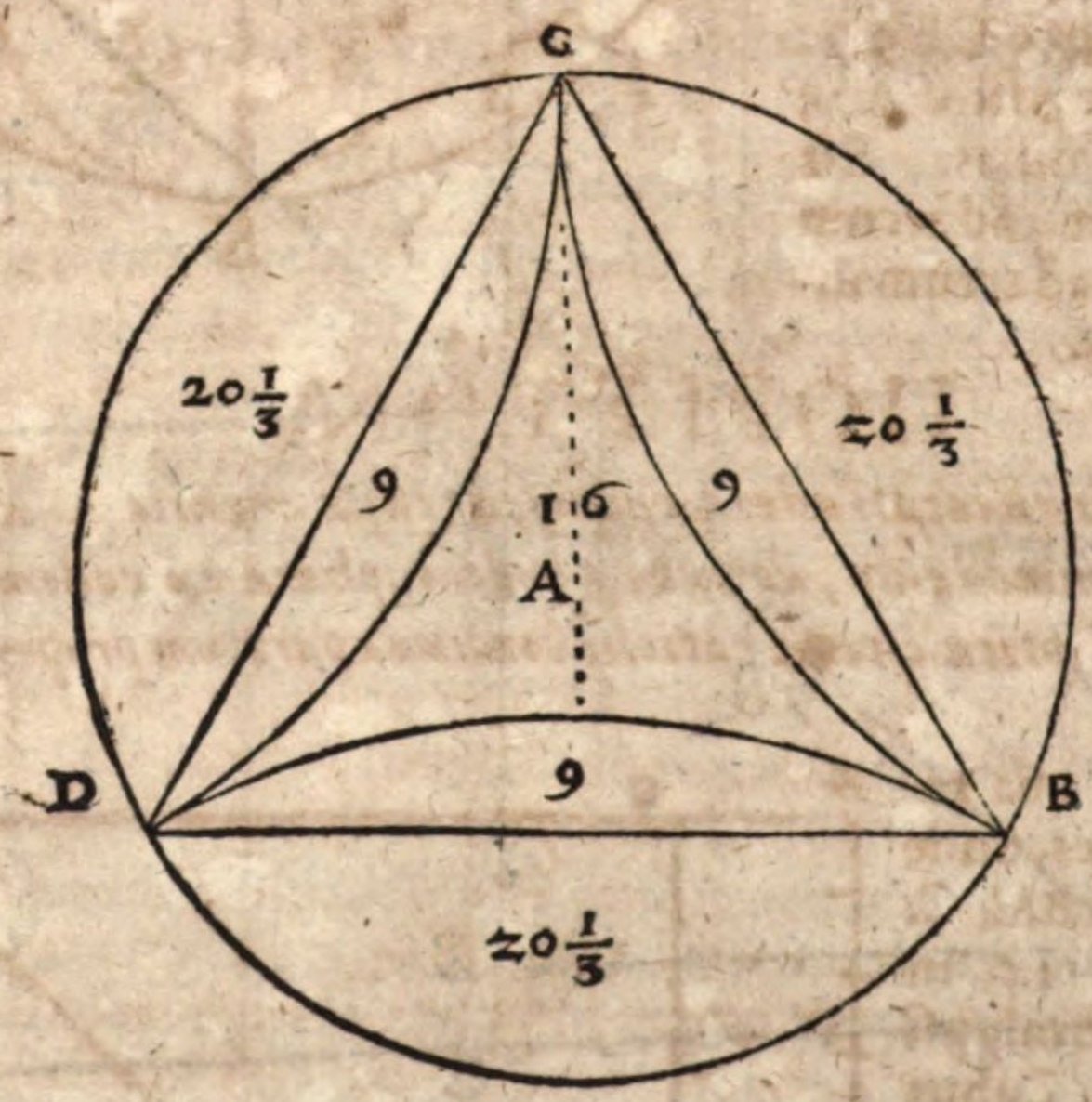
Vides igitur, Lector humanissime, & satis nunc κατ' ἐπισημονικὸν λόγον animo deprehendis, quemadmodum vera *Cyclometria* in hisce *æquationibus* per capita hæc tria proxima nobis oborta sit, dum ipsam Naturam ducem sequendo, nec à Geometricis principiis uspiam digrediendo, eandem concordi quantitatis mensurâ in lucem produximus; Postquam symmetria lateris trianguli æquilateri cum peripheria circuli indubiè præostensa, omnem impossibilitatem imò difficultatem veræ *quadrationis* circuli nobis sustulisset. *Conclusio triũ præmissorum cap.*

Nunc autem quasi *Appendicis* loco, primùm circuli partes inventas in aliquot figuris oculis exponamus; deinde Πρισὸν quoddam etiam sacris paginis conveniens, iis subjungemus, antequam usum *Cyclometriæ* in paucis ostenderimus.

PROPOSITIO II.

Præcipuas figuras intra circulum comprehensis per certas ac inventas suas mensuras in numeris repræsentare; unde reliquæ similes in diversis circulis ad datam rationem augeri minuiq; poterunt.

Quandoquidem ob symmetriam circuli cum triangulo æquilatero eidem inscripto, omnes figuræ, quæ cum dicto triangulo aut etiam ipso circulo dato symmetriam habent, eidem circulo quoq; secundum manitudines suas in veris numeris inscribi poterunt, idq; vel secundum partes cum circulo & triangulo, vel partium partes; Ponatur igitur præsens figura, in qua graphicè totus circulus cum præcipuis partibus suis expositus est, uti vides: quæ omnes in circulis proportionaliter minutis & auctis, ad eandem rationem in diminutione & auctione se habebunt. Exempli gratia: Si triangulum æquilaterum subsequenti circulo inscriptum tertia sui parte diminutionem subiret, triangulum æquilaterum fieret à radiis circuli hujus, eiq; circulus circumscriberetur; sin ve-

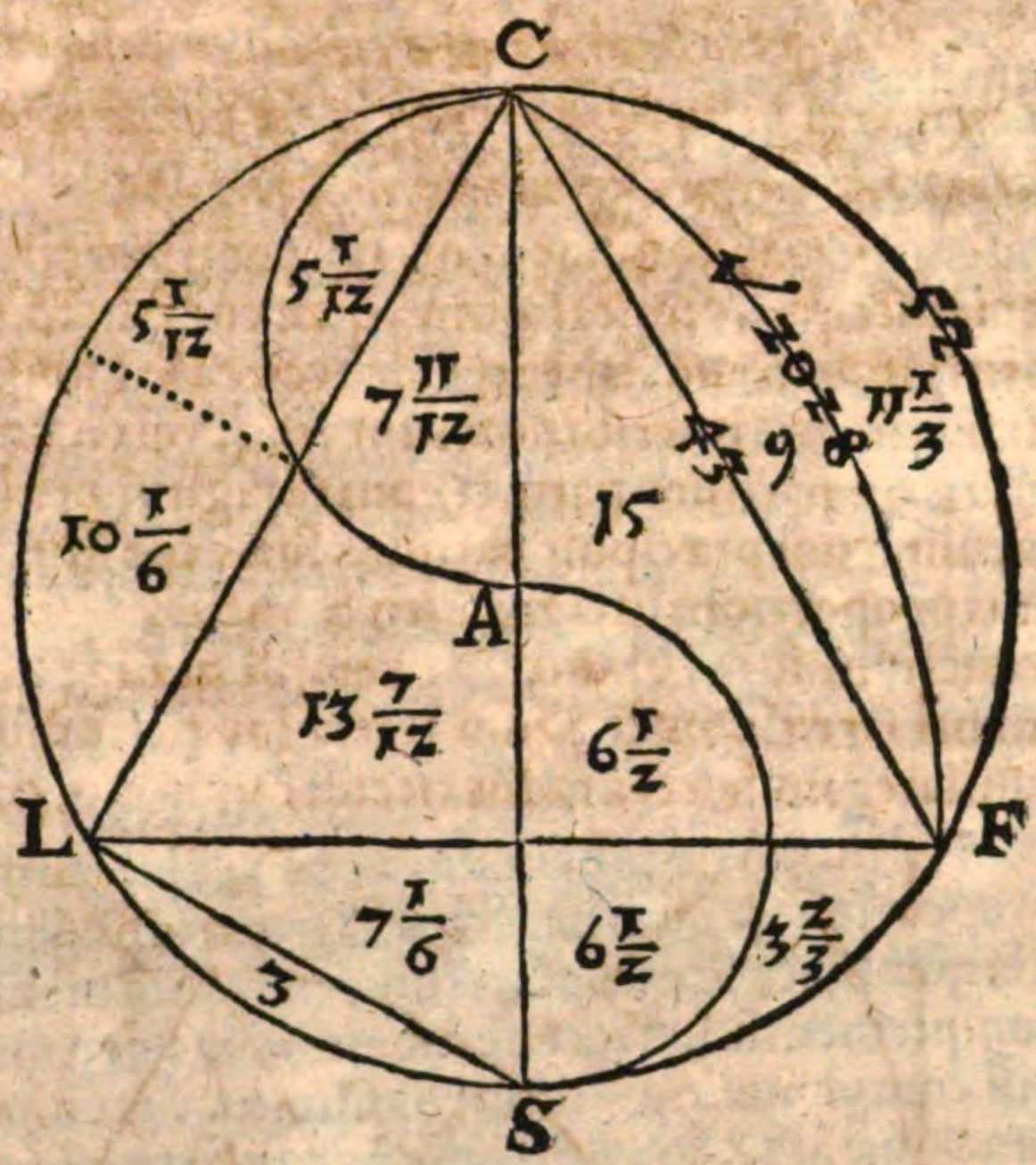


rò quartæ partis diminutio fieret, etiam fieret hujus præsentis circuli radius diameter citculi alterius, eiq; inscribendum triangulum æquilaterum subquadruplum hujus. Idem de aliis omnibus similibus circulorum figuris censendum est. Quin & idem de similibus circumscriptis & quomodocunq; adscriptis figuris ad datam rationem diversorum circulorum intelligendum est, quod singulare compendium pro figurarum similium augmentatione & diminutione habet, ut & pro formatione & magnitudine variorum corporum, è partibus circuli veluti basibus suis exsurgentium, nec postea, ubi de usu Cyclo-
Prop. 20. l. 6. metriæ agimus, multis repetendum: Alias autem non ignoramus, quod figuræ similes sint in duplicata ratione homologorum laterum; Verum penes circulum omnes expeditè admodum, quoad fabricæ simul & magnitudinis indicationem, absolvuntur.

Aliud

Aliud Schema, in quo adhuc variæ circuli partes per veros suos numeros repræsentantur.

Et hêic seorsim variæ partes circuli exponuntur & suis veris magnitudinibus in numeris repræsentantur, quæ collectæ summam efficient 104, quæ partes in integris numeris genuinæ circuli sunt, qualium etiã in integris numeris triangulum est 43. Quin & notatu dignum est, quod superius satis demonstratum dedimus, scilicet eandem esse rationẽ lateris trianguli æquilateri inscripti CL ad peripheriã, quã subtendit, nempe CL, quæ est ipsius trianguli C L E ad triangulum idem auctum scilicet sectione CF 9 p: Deniq; quod FC arcus sit ✓ 2028 demonstratus ex præmissis. Est autem ut CS diameter 4 ad arcum CF 52 sic latus CF ✓ 3 ad arcum interjectum FC ✓ 2028.



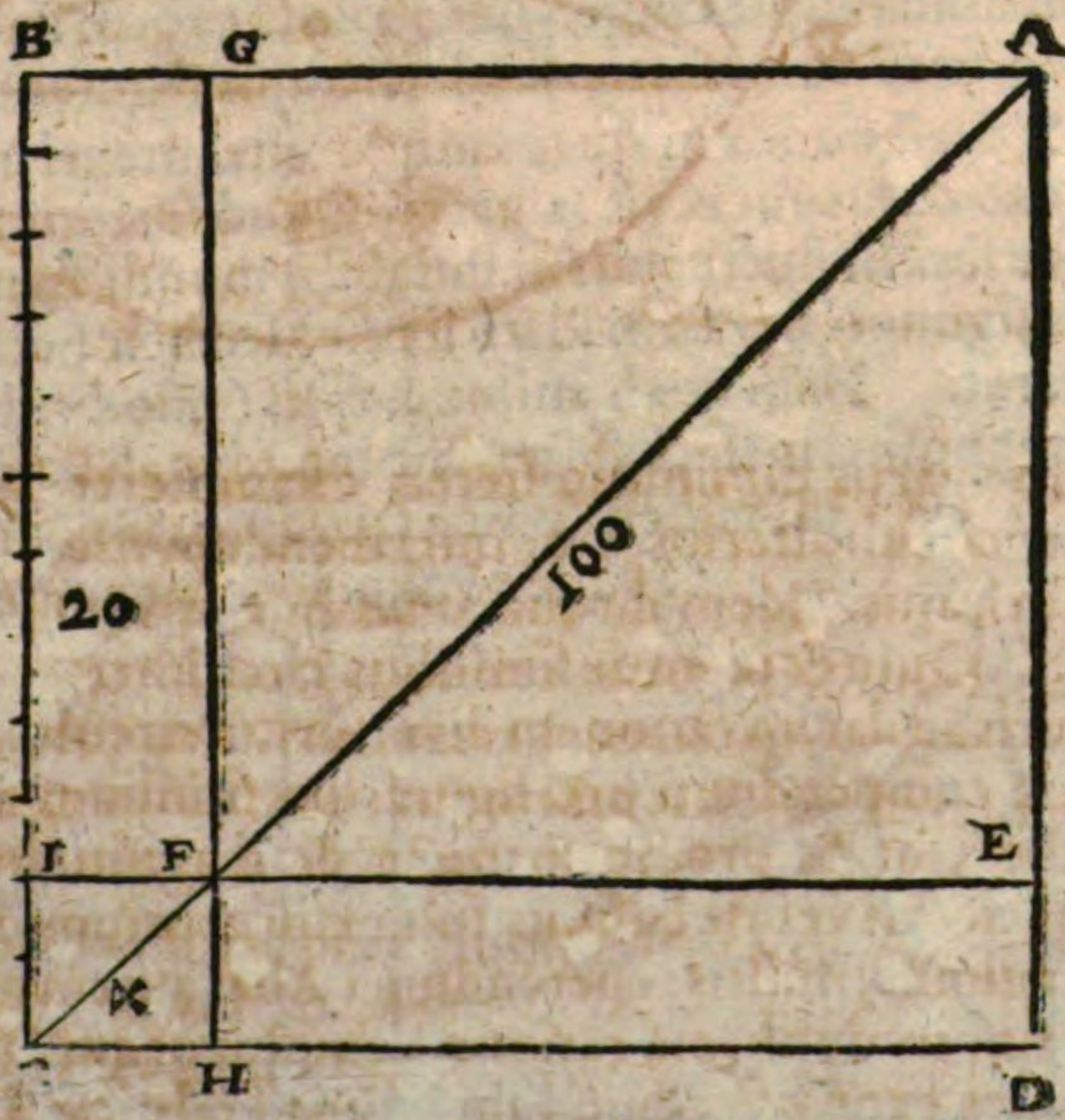
Coroll: pr. 2. cap. 6. Lem: 3. c. 5. & pr. 20 l. 3.

ΠΟΡΙΣΤΟΝ.

Numero lateris quadrati adeoq; ejus areæ, cujus mentio in Apocalypsi fit, circuli mensura accommodatur, ac cubo ejusdem sphæra ex eodem circulo, atq; sic figura ista Apocalyptica circulo ratione continuæ partium proportionis ac cohæsionis præfertur. Apoc. 21.

Dividatur linea aliqua recta in partes 12 æquales, unde quadratũ describatur BADC. Est igitur illius area 144, in numero, qui in Apocalypsi Johannis sese offert. Cubus etiam de latere 12 in textu ibidem indicatur, dum civitas illa Dei, hoc est, Ecclesia & nova Hierusalem, cubicè è tali quadrato exsurgens, describitur, & altitudo longitudini ac latitudini æqualis.

Quum autem circuli area à nobis toties in una eademq; mensura superiùs inventa, nusquam in minoribus integris numeris quàm 104



exponi posſit, dum cum triangulo æquilatero inſcripto velut principali intrà circulum figura comparabitur, etiam in numeris integris, 43 videlicet exponendo; velut huc omnes demonſtrationes noſtræ unicè recidunt: Ductâ igitur in quadrato præmiſſo, cujus latus in partes æquales 12 diviſum exſtat, diametro; & eodem quadrati latere rationaliter diviſo in 10 & 2, ac tandem ductis lineis GH parallela BC, & IE parallela CD per F punctum in diametro; manifeſtum eſt quemadmodum ſpatia circa diametrum, ſeu quadrata GE, & IH ſimul ſumpta menſuram circuli 104 conſtituant: remanent igitur in quadrato primario BD, complementa IG, & HE, ſingula 20 part: Quæ etiam, modò iis quadrata circa diametrum nempe 100 & 4 addantur, conſtituunt quadratum BD, ut id in numeris quoq; conſpicitur: Adde √100 ad √4. Summa 104. productum 400 per 4 multiplicatum facit 1600, cujus radix eſt 40, ſummæ 104 adjecta faciunt 144. aream quadrati BD, cujus latus eſt 12. part:

Praxis.

Vel etiàm breviſsimè. Radix de 100 eſt 10; radix de 4 eſt 2, quæ radices additæ efficiunt ſimul 12.

Ulterius autem, quamvis circulum figurarum perfectiſsimam ſuperiùs cum Ariſtotele agnovimus: tamen cohærentia figuræ hujus per ſuas continuas proportiones, quas natura efflagitat, conſideratâ, fateri neceſſum eſt, quadrata illa quæ hêic, circa diametrum, circulum menſurant, absq; adjectis in primario complementis luxata eſſe, ac elumbia; nec mediis proportionalibus cohærere niſi complemento alterutro aſſumto. Sic enim numerorum proportiones ſunt continuæ 4. 20. 100; quæ proportio ſeu ratio eſt ſubquintupla continua; Quadratum autem gemino complemento munitur, ut magis natura obfirmetur, quod alterum interdum in transmutatione figurarum ſuperfluum eſt, ut in primo noſtro æquationis modo; interdum verò neceſſarium, ut in ſecundo.

Cap. 2.

Concludimus igitur hêic è præmiſsis, quadratum hoc, ratione continuæ proportionis incluſæ, circulo eſſe præferendum.

Quinetiam ſi cubo huic, à tali quadrato, cujus latus eſt 12 part: exſurgenti, ſphæra ex ambitu circuli formata includatur, ac in eo ſuſpendatur, latera quidem quadrati nuſpiã tanget, nec ab iisdẽ procul ſtabit; Eſt enim diameter hujus circuli in iisdẽ cum lateris quadrati hujus ſegmentis, gr. 11. mi. 30 $\frac{11}{17}$ quam proximè, & ideò nondum quadrante unius integri undiq; ſphæra talis à lateribus cubi diſtat, cujus radix eſt 12 part: Quod fortean myſterio ſuo circa ſphæram, quæ rotæ ſimilis fluctuantis ac inſtabilis mundi ſignaturam habet, & cubum ſtabilitatis ſignum (ut etiam Plato ſenſit) ſed hêic Eccleſiæ Dei typum gerentẽ, minimè caret. Nam ut ab anima corpus (quod vult Plotinus) ſervatur, adeò ut hoc potius in illa habitet; Sic mundus ab Eccleſia, & in eadem; cujus tamen limina tactu contaminare nefas eſto.

Prop. 4. c. 9.

Plato in Timæo de natura terræ.

Sed de eo alio loco opportunius.

CAP:

CAP: XI.

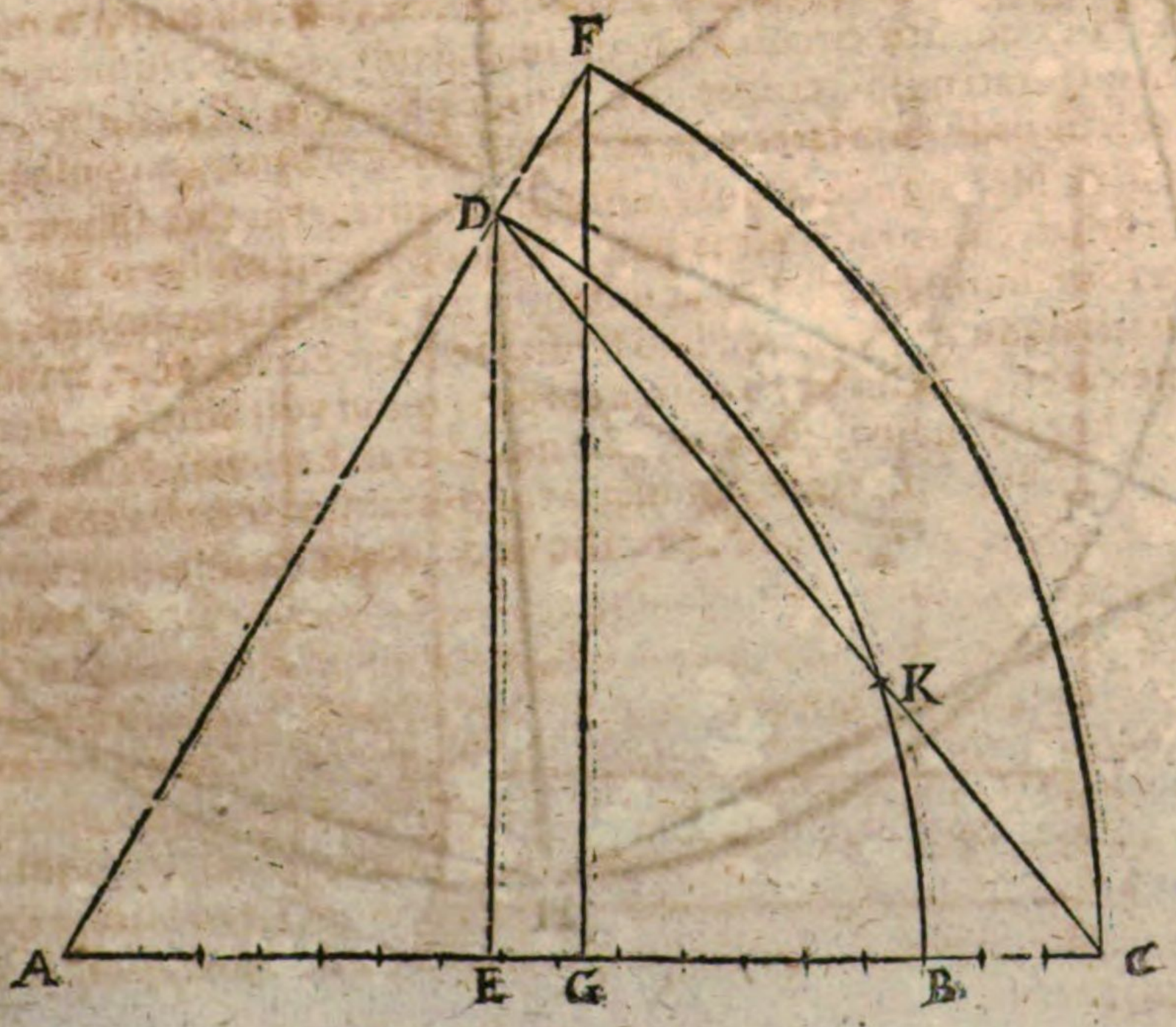
Vbi usus Cyclometriæ in aliquot Problematis traditur, nempe de rationibus, quibus circulus quivis oblatus in rectilineum, imò quadratum, & versa vice, item curva linea in rectam transferri per antedentia potest, idq; tàm beneficio circini ac regulæ quàm numeris: Propterea quibus modis datus circulus augeri atq; minui poterit.

ETsi Cyclometriæ ita inventæ, ut vera sua mensura *Circino* ac *Regula* sit tractabilis, usus immensus ferè esse possit, tàm in plano seu Geometria, quàm Streometria; tamen nos paucis Problematis inpræsentiarum per hoc ultimum caput haud operosè eundem pertractabimus, dum saltem circuli transpositionem in rectilineum & ejus augmentationem ac diminutionem respicimus, aliis gnavis & industriis segetem uberrimam ex hoc fundo ac fundamento metendam relicturi.

PROBLEMA.

Circuli radio dato, ac ritè prius juxta ea, quæ superius ostensa sunt, diviso, si sexta circuli pars super eodem radio describatur, sectori hujus triangulum rectilineum æquale constituere, & ejus peripheriæ lineam rectam æqualem, unde si lubuerit totus circulus mox in rectilineum reducitur, & in eadem figura triangulum æquilaterum circulo Isoperimetrum indicatur.

Pro circuli radio assúmatur linea aliqua recta, & in partes dividatur $14\frac{1}{7}$ æquales, sitque illa AB, quæ ulterius producatur in C, ita ut BC fiat p: 3 earundem, deinde super AB radio describatur sexta circuli pars BD, quod compēdiosè fit dum BD subtensa æqualis fit radio AB. Ductâ autem præterea AD æqua-



li etiam AB, fit sector BAD è sexta circuli parte. Huic autem sectori triangulum rectilineum æquale constituatur ADC, ductâ scilicet lineâ DC, juxta ea, quæ

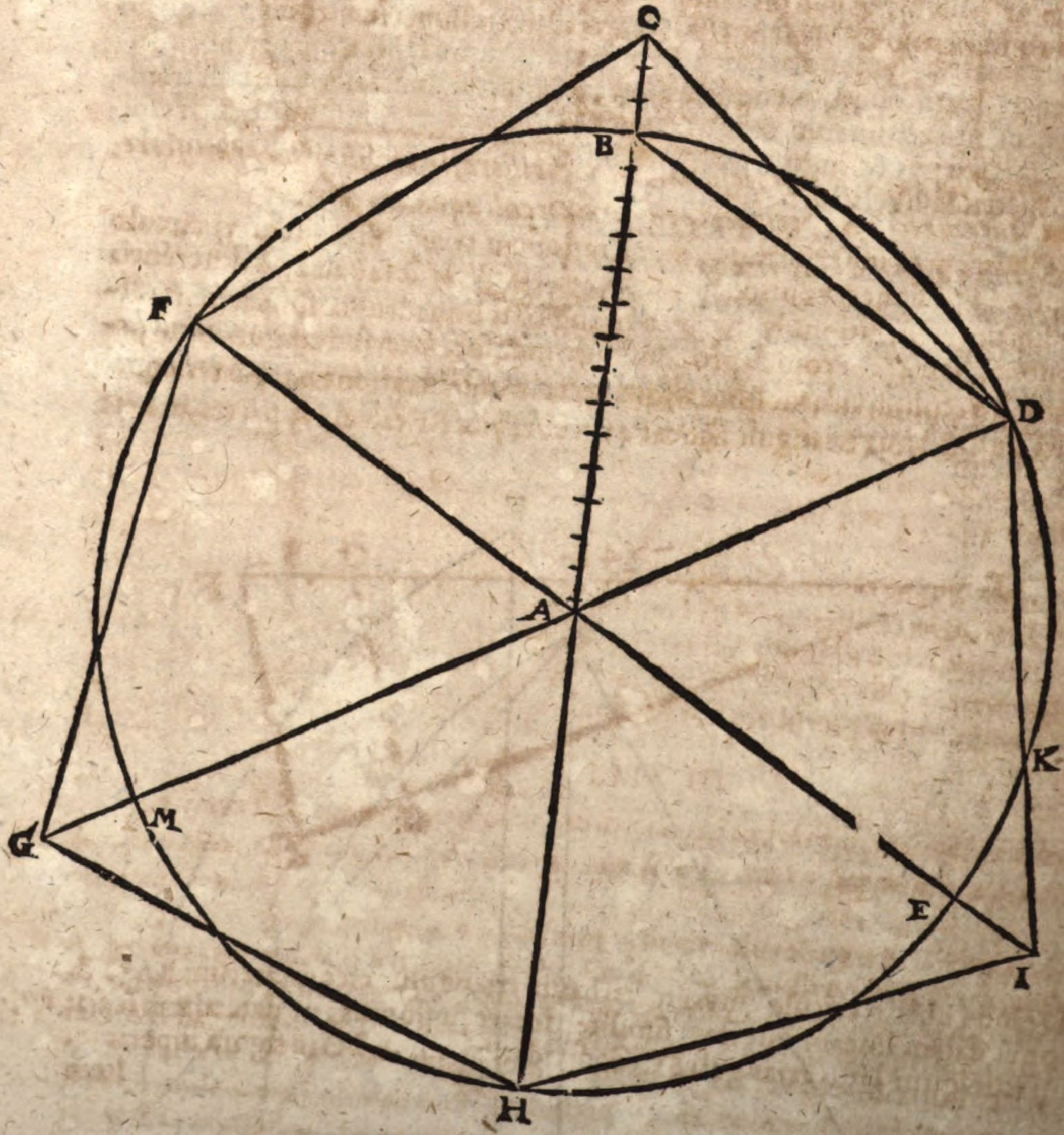
Prop. 1 cap. 4. &c. priùs sunt demonstrata.

Porrò extenso circino in C describatur super radio AC etiam peripheria sextæ circuli partis CF, & ductâ AD in F, si demittatur ab F in AC perpendicula-

Cap. 8. 9. 10. ris FG dividet AC bifariam, & eadem FG erit æqualis peripheriæ BD etiam juxta ea, quæ superius ostendebantur.

Primò enim quia triangulum ADC se habet ut basis AC, eodem modo &

Prop. 1. l. 6. ADB triangulum ut basis AB; Est igitur sectio hexagoni in triangulo BDC; part: qualium ADB $14\frac{1}{3}$ ut antea satis superq; ostensum dedimus.



Deinde

Quoniã autem nulla Geometrica demonſtratio vera eſſe poteſt, quæ δοκιμασίαν Mechanicam, ſi ea haberi queat, non ſuſtineat: Equidem Cyclometriam noſtrã ſæpiſsimè & ſubtiliſsimè ſuper hoc ſchemate in menſuratione lineæ curvæ B D cum recta F G (etiam radio A B ad 5 ulnas aut amplius extenſo) exploranas, ſemperæqualitatẽ harum linearum cum delectatione deprehendi. Tali autem explorationi modò illuſtris Joſephus Scaliger ſuam Cyclometriam etiam ad monitum aliorum haud invitò ſubjeciſſet, errores ſuos ſatis enormes in eadem maturè deprehendiſſet. Si enim, ab ipſius inventione, A B ſumatur 5 p: qualium B C 1 part: fuerit, perſenties D B arcum in mechanica rractatione ſenſibiliter ſatis majorem fore lineâ F G, quod etiam à me exploratum memini. Nunc integer circulus ecce in eadem proportione ſubjicitur, qua priùs ejus pars ſexta.

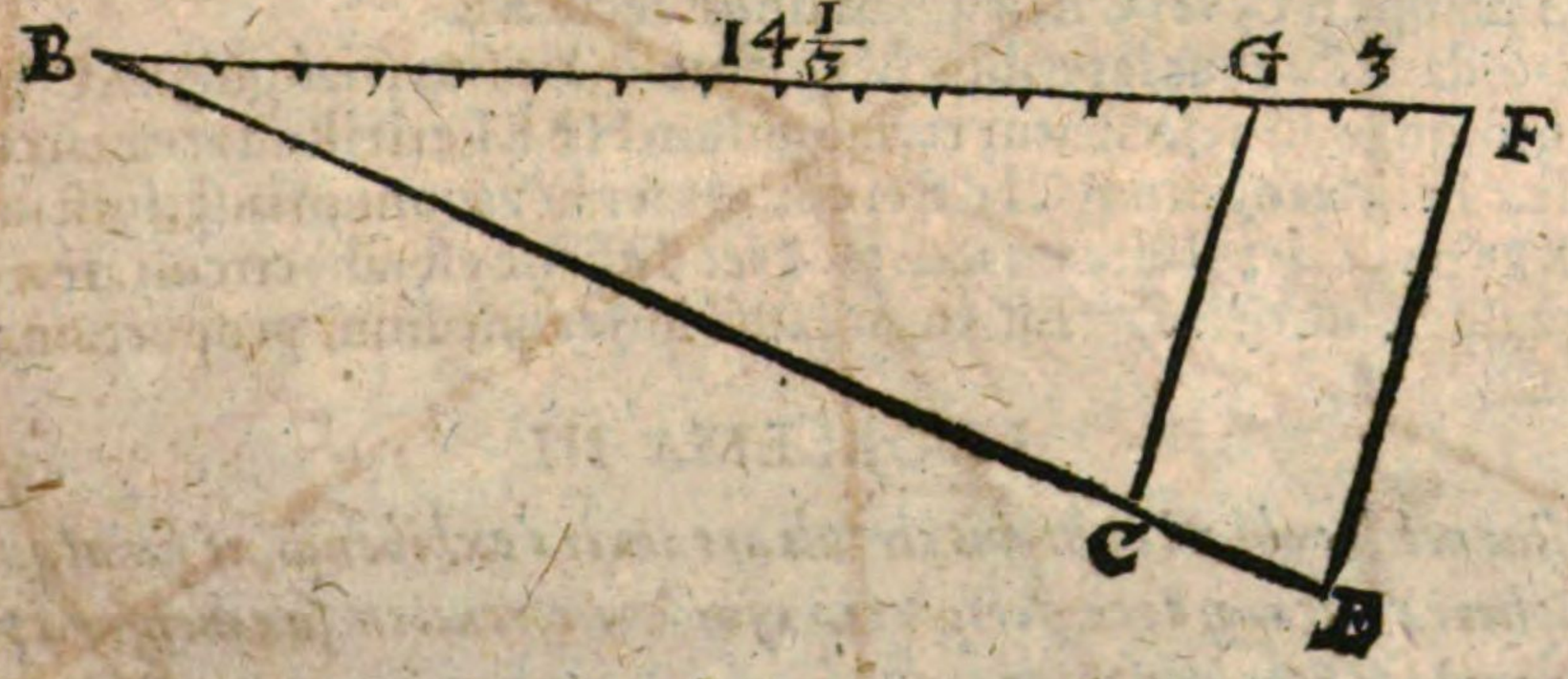
Admonitio de Mechanica Cyclometriæ exploratione opportunè hoc loco inſtauenda.

In hac rectilinea figura ſexangulari à centro A ſatis ex ſuperiori proxima intelligitur circulus appoſitus comprehendi, & modò in ea concipiatur triangulum æquilaterum C G I idem eſſe circulo adjecto Iſoperimetrum.

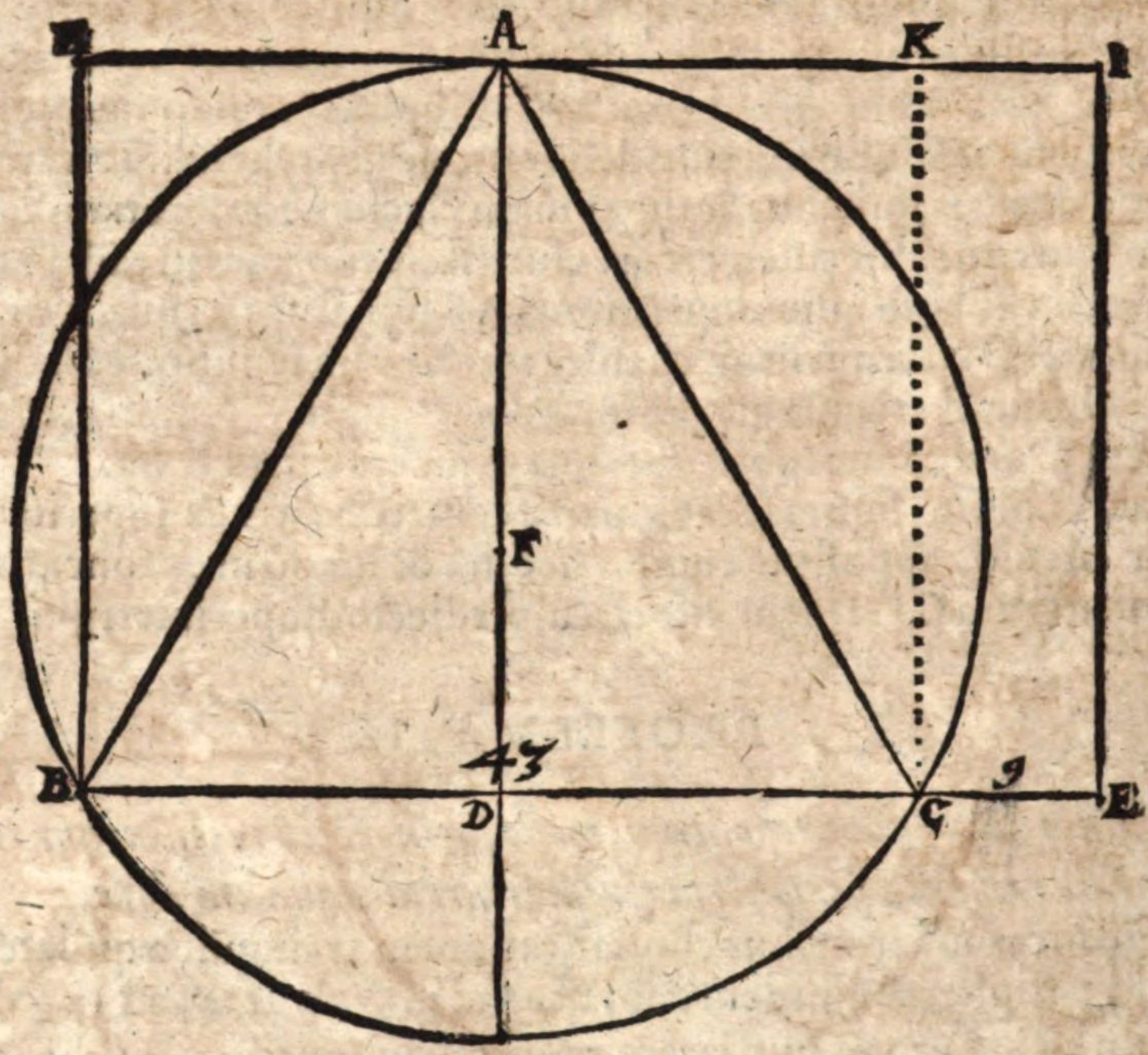
PROBLEMA II.

Circulum quemlibet propoſitum, modo faciliore, in rectilineum transferre, & ſimul lineam rectam $\frac{1}{5}$ peripheriæ ejusdem circuli æqualem dare.

Quoniam ex ſuperioribus conſtat, rationem trianguli æquilateri circulo inſcripti ad $\frac{1}{5}$ peripheriæ ejusdem eſſe; ut 43 ad 52: Vel, ut $14\frac{1}{3}$ ad $17\frac{1}{3}$ differentia igitur horum eſt in ratione cum latere trianguli ſubquadrupla ſubpartiente ſeptem nonas, ſeu $4\frac{7}{9}$. Proinde pro communi menſura lateris trianguli, item peripheriæ $\frac{1}{5}$ circuli, dividatur linea aliqua recta in eadem ratione per partes æquales, ita ut B G latus trianguli habeat 43, vel $14\frac{1}{3}$: & B F 52, vel $17\frac{1}{3}$ partes, ut hêic vides.



Deinde oblato circulo cuivis inſcribatur triangulum æquilaterum B A C, & quoniã datam lineam inſectam ſimiliter ſecare poſſumus, ut data altera ſecta: Sumatur igitur latus trianguli B C, & dividatur ratione B G in figura ſuperiore. *Prop. 10. l. 6.*



Item producatur posteà BC infinitè, ac dividatur ratione BF, & fit BE. Quoniam igitur est ut BC ad BG, sic BE ad BF: & sic CE ad GF. Continetur ergo CE in BC vicibus $4\frac{3}{7}$, & dicta differentia, qua excedit latus trianguli BC præsenti circulo inscripti ipsius peripheriæ pars $\frac{1}{7}$. Est igitur hæc pars $\frac{1}{7}$ peripheriæ ejusdem nempe BC, vel CA, æqualis lineæ rectæ BE.

Deinde è datis duobus lateribus, BH, altitudine ipsius trianguli BAC, & BE modò invento, quando describatur rectangulum HBEI, erit illud areæ circuli oblati æquale. Et rectangulum CI differentia inter hexagonum inscriptũ in rectangulo BK 86 p: & circuli ream 104. p. Nec difficile est talis circuli areæ quadratum æquale constituere. Est enim latus hujus medium proportionale inter HB & BE.

Lem: 2. c. 5.

PROBLEMA III.

Alius modus oblati cujusvis circuli ream ita exhibendi, ut simul quadrans, semiperipheria, deniq; tota peripheria ejusdem circuli in sua mensura per circinum ac regulam repræsentetur.

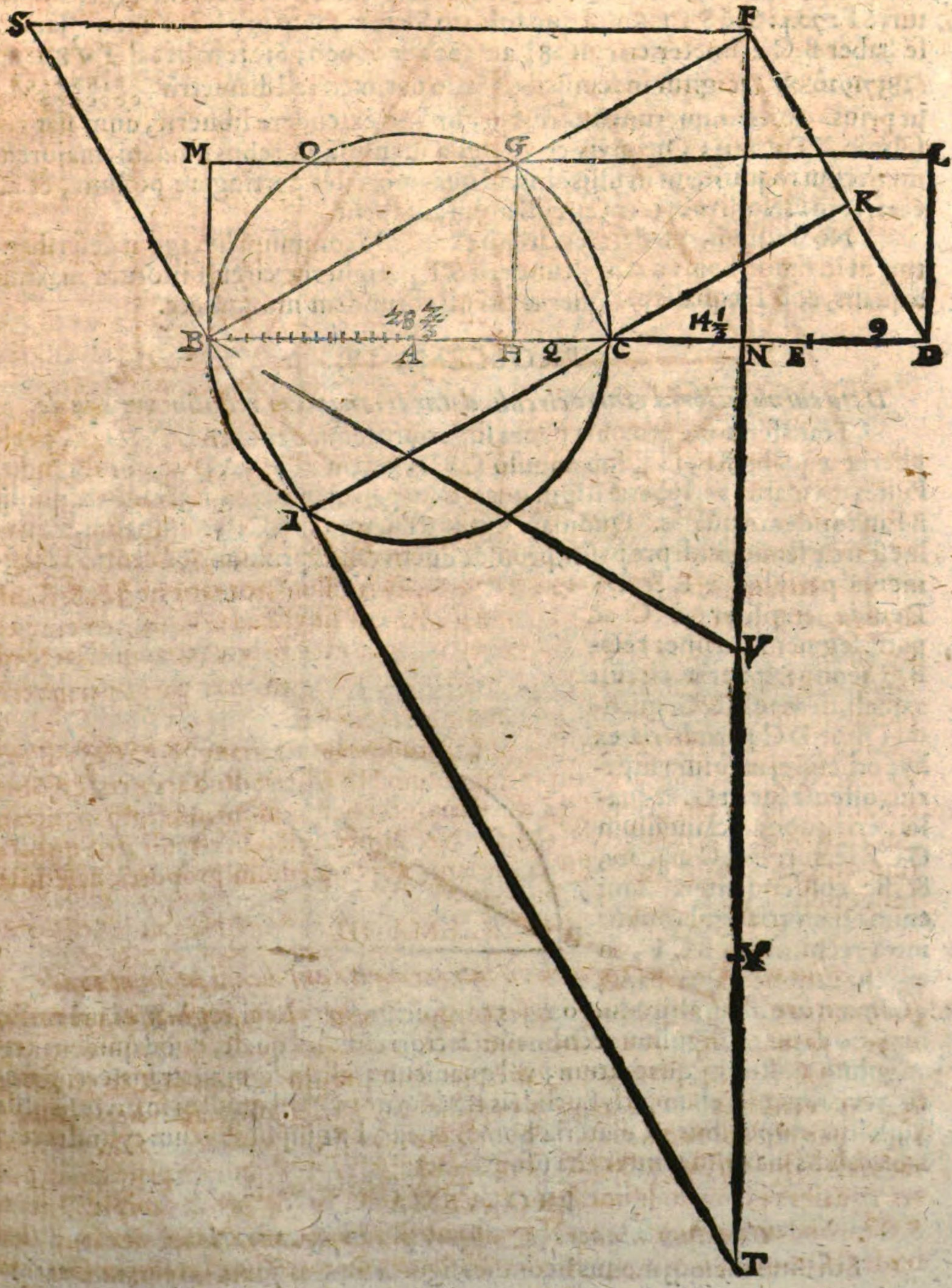
Super A centro ac distantia AB describatur circulus aliquis BGCI, cujus & ream in rectilineo, & quadrantem peripheriæ, item semissem peripheriæ, adeoq; totam peripheriam etiam *circino* & *regula* mediantibus cognoscere velis. Primò radius AB dividatur juxta præcedens problema, ac ejus figuram priorem in partes æquales $14\frac{1}{7}$: Deinde ducatur circuli diameter BC, ac producatur in D, ita ut BD earundem partium sit 52. vel 9 part: ultra tres radios. Posteà ducatur subtensa CG æqualis BA, & agatur à B extremitate diametri linea recta per G infinitè, in

Prop. 10. l. 6.

tè, in quam alia à D normalis ducitur in F. Eſt igitur juxta ſuperiùs demonſtrata B F æqualis ſemiperipheriæ circuli propoſiti : ac proinde area hujus rectangulo B K includitur, conſtante lateribus B I lineâ æquali radio, & B F lineâ recta æquali ſemiſsi peripheriæ, cui æquale eſt rectangulum B L etiam ex ſuperioribus. Deinde fiat F S parallela & æqualis D B: Tandem ſi agatur ab S per B & I

Prop. 1. c. 5.

Prop. eadem.



linea recta infinitè, & alia ab F in N perpendicularis B D, quæ producatur donec occurrat infinitè protractæ in T: Erit F N æqualis quadranti peripheriæ circuli propositi, & F T æqualis toti peripheriæ ejusdem: Cujus mensura, prout diameter hêic supponitur $28\frac{2}{7}$ p: facilè in irrationalibus acquiritur. Quoniam enim S T dupla est B D seu S F; Quadratus igitur numerus utriusq; harum datur, S F 2704: Sed S T 10816. à quo sublato S F remanent pro F T $\surd$ 8112. Jam ut se habet B C diameter circuli $28\frac{2}{7}$ ad 20000000000; Sic se habet F T $\surd$ 8112 ad 628371920 88. Est igitur in semisibus ratio perimetri ad diametrũ $\frac{3141859044}{1000000000}$ ut prius. Aut si numerum ulterius per siphras extendere libuerit, dum fiat resolutio F T $\surd$ 8112; Quamvis certè nulla mensura in rebus humanis majorem numerum requirit, aut in ullis aliis, ad quas mortales pertingere possunt, & ad eas sive in cœlo, sive in terra circuli usum adhibent.

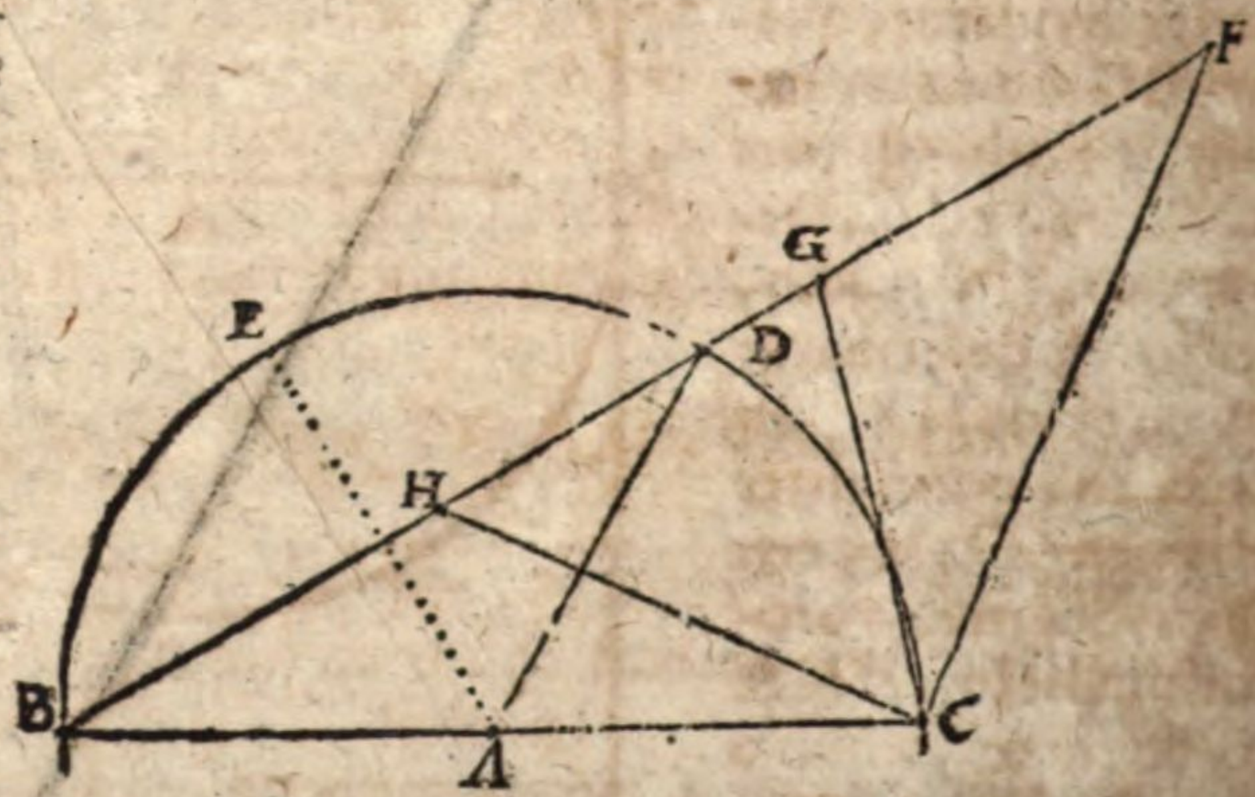
Prop. 47. l. 1.

Nota autem, quod si tres circuli ex angulo communi hexagoni describantur, ut in figura Lem: 1. cap. 5. tunc erit S T peripheriæ circuli istorum maximi æqualis, & B T æqualis peripheriæ circuli eorundem minimi &c.

PROBLEMA IV.

Dato cuivis sectori à centro circuli, datur triangulum rectilineum æquale.

Transferatur è proxima figura superiore semicirculus B D C, & ejus peripheriæ æqualis B F, idq; sub angulo C B D, quem radius A D unicè subtendit. Postea dividatur peripheria B C in quascunq; partes symmetras, similiter quoq; B F in totidem æquales. Quoniam igitur triangulum B C F rectilineum, æquale est areæ semicirculi propositi; proinde ductis radiis primum ab A centro ad segmenta peripheriæ E & D. Deinde similiter à C ad paria segmenta in linea recta B F semiperipheriæ circuli æquali, nempe H & G; quando igitur D C peripheria ex hypothesi vel mensura superiùs ostensa fuerit G F æqualis, erit quoq; rectangulum G C F sectori D A C æquale, & sic consequenter. Sunt enim etiam triangula omnia intra rectilineum B C F, in eadem ratione, qua basis, quoniam in eadem altitudine omnes conspiciuntur. Levi ergò & planè nullo negotio datur triangulum rectilineum sectori circuli æquale, quod quidem triangulum postea in quadratum, vel quamcunq; aliam figuram transferri poterit, per ea, quæ in elementis Euclideis traduntur: Quod quidem in diversis aliis æqualtis corporibus ex materia homogenea ad æquipondia cum cylindraceis fabricandis maximum inter alia usum habet.



Prop. 1. l. 6.
Prop. 44. & 45. lib. 1
Item prop. 14. l. 2. &c.

PROBLEMA V.

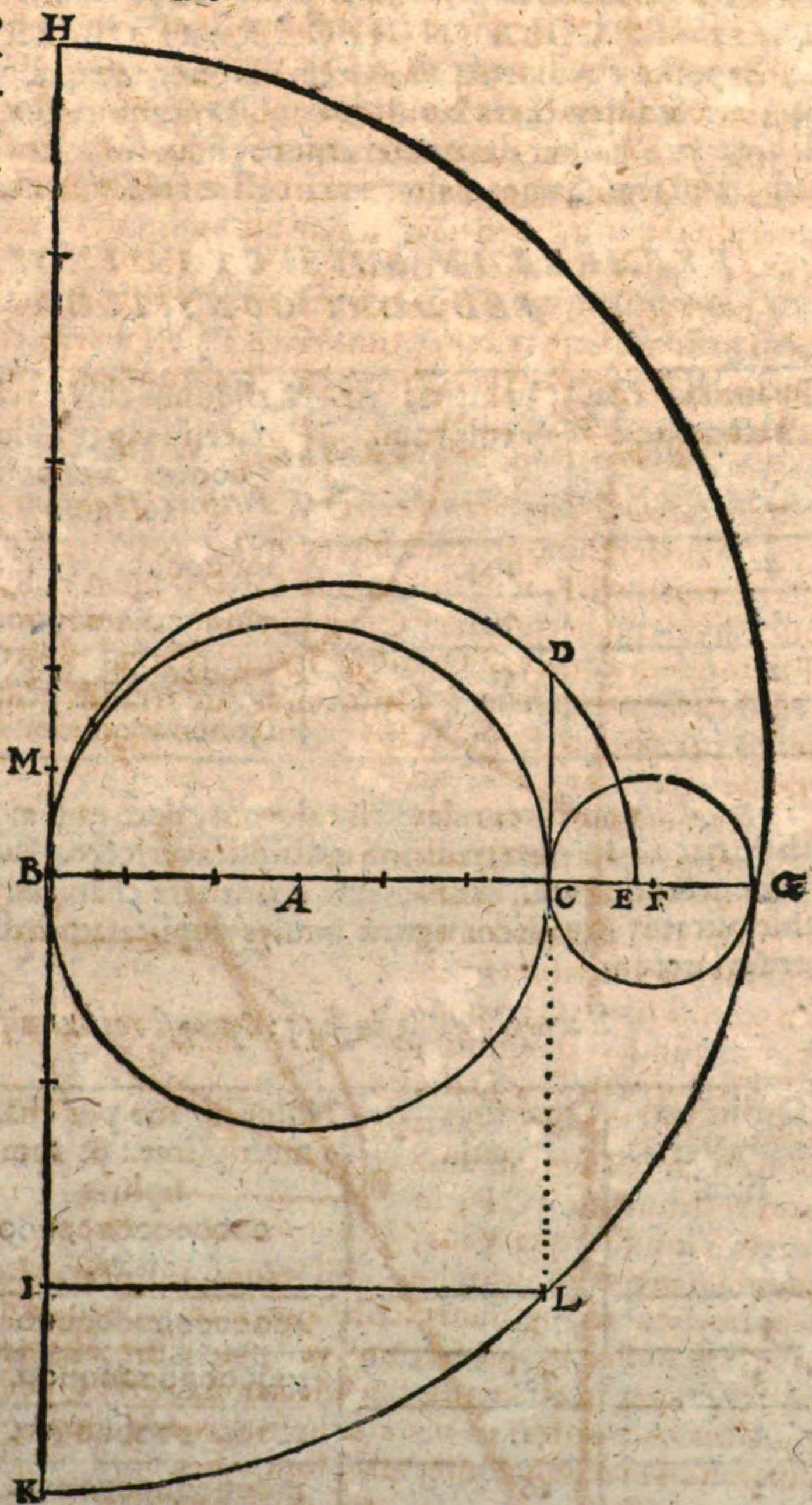
Circulum minuere, & augere pro imperata ratione.

Etsi unus idemq; modus sit omnes figuras similes juxta imperatam ratio-

nem di-

nem dilatandi & diminuendi, quippe per acquisitum mediũ proportionale inter figurarum similium homologa latera: tamen ob insignem usum, quem circulus inprimis præstat ad datam rationem diminuendus aut augendus, & quia *Problema* hoc superiori proximo vicinum est; ejus itaq; exemplum unum hic relinquemus, ad quod cetera transigi poterunt.

Sit super centro A, diametro BC, descriptus circulus BC, ex cujus sexta tanquam imperata parte, alius circulus describendus est. Quocirca inventâ lineâ mediæ proportionis inter BC, diametrũ & ejus sextam partem CE, quæ sit CD; ex qua CD factâ diametro describatur circulus prioris subseduplus. Rursus dato circulo EG super centro F, si alium nempe BC sexies majorem describere velis, ducatur linea recta HK & in 7 partes æquales dividatur, quarum EG diameter expositi circuli est pars una, & æqualis IK. Deinde facto, in medio, centro M, describatur semicirculus HK. Et erecta ab I normaliter in L linea recta IL, erit hæc inventa media proportionalis inter HI & IK, & ideò diametro BC æqualis. Eodem modo in aliis omnibus exemplis circulus diminuitur & dilatatur.



Prop. 13. l. 6.

Data autem area circuli una cum diametro, facilè & superficies sphærica, & circuli soliditas datur per ea, quæ in Geometria, præcipuè autem Petri Rami, breviter demonstrantur.

Lib. 2. El. 5. & L. 26. El. 5.

PROBLEMA VI.

Ex data mensura circuli principalis 104, prout in hoc numero à nobis inventa est: & postea reducta ad mensuram circuli, cujus radius est unitas cum aliquot sufficientibus siphris, alterius cujusq; minoris circuli tàm radium, quàm diametrum in ratione imperata cum principali per numeros invenire.

REGULA IN HAC PRAXI OBSERVANDA.

Expositæ circulorum adinvicem rationes, seu qualitates analogicæ, nempe 4. 3. 2. 1. &c. quæ characteristicæ à nobis vocantur, quando à fine cujusvis circuli areæ rationaliter datæ auferuntur residui sufficientibus siphris aucti radix quadrata est semidiameter alterius circuli in speciem quæsita.

EXEMPLA IN SUBJECTA SYNOPSI PRAXIN REDDUNT CONSPICUAM.

Quantitas characteristica.	Quantitas circulorum.	Residuum abjectâ characteristica per siphras ooooooooooooooo auctum.	Radix quadrata quæ est semidiameter quæsita.
4.	104	1000000000000000.	10000000.
3.	78	7500000000000000.	8660254:
2.	52	5000000000000000.	7071068.
1.	26.	2500000000000000.	5000000.

Porro diametri eorundem circulorum, dum eadem cujusq; characteristicâ quantitate ablatâ numerum 100 multiplicaverit &c. Facti enim radix quadrata est diameter quæsita. Vel abjecta quantitate characteristica, & residuo per 4 multiplicato: Siquidem figuræ similes duplicatam habent rationem homologorum laterum.

Exemplis quoq; in seqq: Synopsi res manifestatur.

Quantitas characteristica.	Quantitas circuli.	Numerus 100 per charact: multiplicat: & summa siphris ooooooooooooooo aucta.	Radix quadrata quæ est diameter circuli quæsita.
4	104	4000000000000000.	20000000.
3	78.	3000000000000000.	17320508
2	52.	2000000000000000.	14142136
1	26	1000000000000000.	10000000.

Hac arte non modò semidiametri & diametri ex circulis propositis, sed etiam ex omnibus aliis evolvuntur, quorumcunq; circulorum areæ in imperata seu

ta seu data sunt ratione cum area inventa circuli maximi. Ut: si quæratur radius circuli quintuplo minoris quàm maximus est, cujus radius vulgò ponitur 10000000. Ex numero igitur inventi à nobis circuli 104 abjecta characteristica quantitate 4, & reliquis 100 per datam diminutionem 5 divisis fiunt 20, cui si addantur 12 siphræ, erit numerus quadratus 200000000000000, cui latus quadrati 44721247 radium circuli $1\frac{0}{5}$ ostendit. Sin verò potius diametrum ejusdem quintuplo minoris habere desideras, multiplica 100 per characteristicam quantitatem nempe $\frac{4}{5}$ & fiunt 80, & adjiciendo siphras consuetas 12, fit numerus quadratus 80000000000000 cujus radix est 8944248. Idem quoq; fit multiplicatis $1\frac{00}{5}$ per 4, emergunt enim hinc 80 &c.

PROBLEMA VII.

Dato circulo mox quadratum ei æquale adaptare, & versa vice: Dato quadrato, circulum confestim æqualem apponere, unum aut plura utrius q; simul.

Latus quadrati è mensura circuli inventa in mediocribus numeris ad hoc exputare convenit. Et quia dicta mensura areæ circuli superiùs acquisita est 3141859604400000 prodit inde radix 17725292 ferè; & ideo ejus dimidiũ 8862646. Proinde in apposito circulo BKC super A centro; cui superius quadratum GHIF æquale fuit, si habeatur angulus LAK, penes quem mensura est arcus BK, faci- Prop. 4. c. 10.

limo

limo modo circuli dati in quadrata æqualia vertuntur,& versâ vice. Est enim K A L angulus communis omnibus circulis cum suis quadratis æqualibus inscribendis,ut circulo interiore O M P cum suo quadrato æquali Q S T R : ducta enim linea perpendiculari à K in L, vel ab M in N, erit A L semissis lateris quadrati maximi F H, quod circulo quantitate respondet super radio A B descripto &c.

Nam A N est etiam semissis lateris quadrati R S respondentis quantitate circulo super radio A O ; & sic deinceps. Igitur ut dictus angulus communis L A K ritè quæratur, διδόμενα sufficientia in promptu esse debent, quæ hæc sunt; A K radius 10000000, A L 8862646; Præterea angulus A L K rectus; Quocirca in apertum producitur angulus quæsitus L A K 27 gra : $35\frac{6}{11}$ M. quàm proximè qualium circulus censetur 360 gr : quo per subtilem mechanicam divisionem in majore circulo perpetuò habito, & artificiosè binis oblongis baculis incluso in centro A connexis, quorum unus referat A B, alter A K, reliqua, quæ modo attigi, quovis loco facilimâ, ut vides, praxi sequuntur.

Porrò si in numeris absq; omni circuli & quadrati mechanica tractatione quisquis idem celerrimè perficere velit: primum circulum datum in quadratum æquale tali numerorum proportione conformabit, ut A K rad. 10000000, ad A M radium circuli dati: Sic A L 8862646 ad semissem lateris quadrati quæsitum. Et vice versâ &c.

PROBLEMA VIII.

Dato circuli radio ejusdem circuli circumferentiam, & item quadratum eidem æquale, per instrumentum, quod Scalam Geometricam nominant, confestim in lineis rectis acquirere: aut dato uno horum, reliqua invenire.

Hæc pragmateia quoniam inter alia, in doliis ac vasis, item cadis vinariis inprimis fabricandis, ac mensurandis usum habet maximum, ideò Scalam è duro ligno & inalterabili; vel etiam metallo, tantæ longitudinis fieri oportet, ut semidiametros basium magnorum cadorum æquare possit, quæ, ni fallor, intra mensuram trium pedum cadunt: intra quam quoq; mensuram omnia minora vasa dicto ac apposito instrumento proportionari possunt, & prætcrea plurima alia eidem Scalæ ex utraq; facie convenienter inscribi, maxime verò, quæ faciunt ad mechanicam solutionem triangulorum tàm planorum quàm sphæricorum magis exquisitè, atq; in parvis illis, quæ in usu hodie habentur, & ad fortificationes, & alia, sunt directæ. In hoc instrumento adjecto & satis hodiè apud plurimos noto, primùm pro præsenti usu dividatur linea A B in partes æquales $14\frac{1}{7}$ prout radius circuli superiùs distributus est, quod quum factum fuerit, & linea illis recta æqualis peripheriæ sextæ partis circuli inventa, quando huc transfertur, erit illa A D. Præterea quia è radio A B & triplicata mensura A D oritur rectangulum areæ circuli æquale: Quando igitur horum laterum medium proportionale quæratur, erit hujus dimidium A C: Quod est dimidium lateris quadrati circulo æqualis.

Prop. 1. hujus.

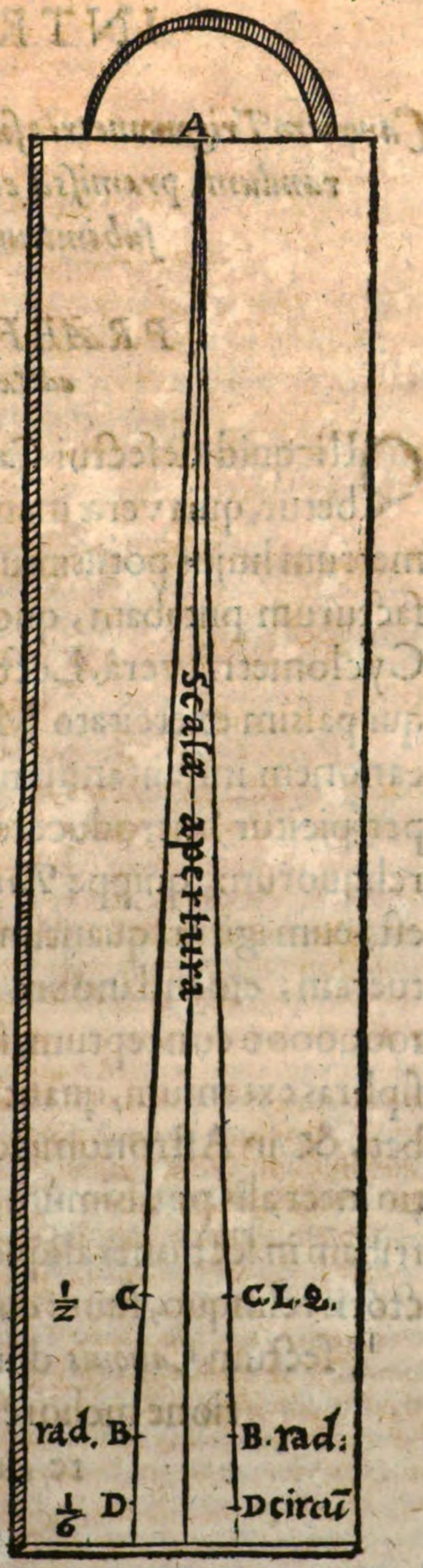
Prop. 13. l. 6.

Quum autem ad majorem vel minorem aperturam Scalæ hujus, seu radii circuli B B circinus aliquis exquisitè aptetur, huic radio, qualiscunq; pro libitu fuerit, reliqua puncta seu indicia analogicè respondebunt, ita ut D D indidem $\frac{1}{8}$ partem peripheriæ, & C C semissem lateris quadrati indicent; Vel uno horum dato; quod satis in praxi exercitato innotescit.

Hæc

Hæc pauca inter infinita alia occurrebant, quæ deusu Cyclometriæ veræ ac rationalis adscribenda fuerunt. Quod autem canones trigonometriæ concernit, sub initium ac finem quadrantis defectu aliquo in *sinibus*, *tangentibus* ac *secantibus*, laborantes, & ideò ex vera *Cyclometria*, quæ ultima segmenta arcuum perfectè metitur, duntaxat perficiendos, illud in Appendicem hujus Tractatus rejicimus.

Ergo tandem, Deo & Natura duce, Cyclometriam ad eum finem perduximus, ac circulum ad eam dimensionem redegimus, ad quam interna ejus indoles tot ἐπιχειρημάτων viis sollicitè investigata unicè tendit; Quam ob id tàm veram, quàm perfectam appellare non erubescimus, sperantes, quod veritatis amantibus tandem antiquissimi hujus Zetematis vera, & indubia solutio gratissima sit futura, adeò ut etiam ob tractabiles in symmetris dimensiones quibus *circinus* & *regula* tam promptè adaptantur, usus hujus Cyclometriæ inolescat, & apud posteritatem, si qua futura est, grata nostri memoria perennet. Quum enim id Archimedi indultum videamus, quod posteritas Cyclometria ejus hactenus, ut plurimum, usa sit, quæ rationem peripheriæ ad diametrum triplam sesquiseptimam supponit, ad quam necdum inventio ejus se extendit; Certè dubitare non debeo, quin hæc & per se verissima, & usui longè accommodatissima, commendationem bonorum ac intelligentium gratiosam ubiq; sit meritura. Quod autem reliquum est SOLI DEO TRIUNI, A QUO OMNIA DONA PERFECTA DESCENDUNT, SIT HONOR ET GLORIA IN CUNCTA SÆCULA, AMEN.



Conclusio.

INTRODUCTIO
AD
Canonem Trigonometriæ ſub initium ac finem quadrantis inſtaurandum, præmiſsâ emendatione, quæ ſinibus rectis, ſub initium canonis, convenit.

PRAEFATIVNCVLA
ad Lectorem Mathem:

QUicquid defectui *Canonis Triangulorum* ſupplendo debetur, quia veræ menſurationi perimetri circuli ad diametrum hujus potiſsimum incluſum eſt, operæ precium me facturum putabam, quod inventâ modò, è divino favore, Cyclometriâ verâ, Lectorem inter alios ejus eximios uſus, qui paſsim exercitato Mathematico occurrunt, ad dictum canonem inſtaurandum (ubi etiam generalis ipſius fabrica perſpicitur) introducerem. Quoniam verò *Sinuum Canon* reliquorum, quippe *Tangentium* & *Secantium* velut mater eſt; eum igitur, quantum opus fore equidem ratiocinari potueram, emendandum ſuſcepi, nec tamen intra radium 10000000 conceptum, ſed potius ultrà ad plures ceu decem ſiphras extenſum, quantum Opus Palatinum inprimis exhibet, & in Aſtronomico calculo parallaxium &c. enucleatio inter alia potiſsimùm requirit. Hanc igitur in *ſinibus* diatribam in ſectiones aliquot ſeqq: tributam, judicio æqui Lectoris relinquo, ſuum cuiq; deinceps permiſſurus, ſi qui defectum *Canonis* diu multumq; deſideratum, ratione meliore & accuratiore ſuppleve noverit. Vale.

IN-

INTRODUCTIONIS AD *Canonem triangulorum emendandum.*

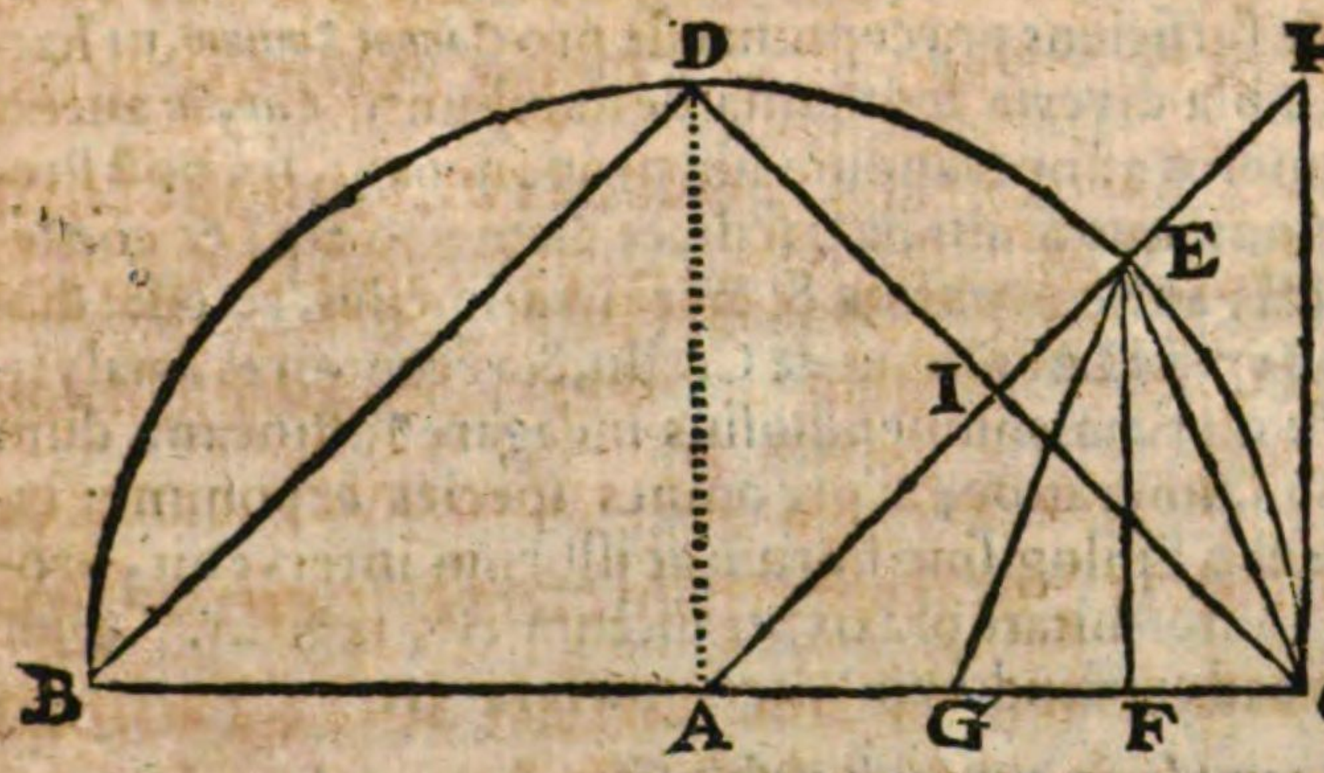
SECTIO PRIMA.

HAc prima sectione duo breviter, ut cetera, expedire decrevi.
Primùm de præcepto generali, & ἀφόδῳ seu calculatione prope indifferenti eorum, qui hactenus in irrationalibus subtensas in circulo quæsiverunt.

Secundum de insufficiente calculi eductione per δίχοτομίαν ad initium quadrantis circuli, ob duas causas illuc maximè concurrentes.

1. Quod præceptum illud generale attinet, etsi plures viæ ad texturam Canonis sese offerant, ut præcipuè in Opere Palatino cognosces; tamen generaliter per δίχοτομίαν absolvitur, super hac propositione.

Media proportionalis inter radium & differentiam complementi datæ inscriptæ, & diametri, est inscripta dimidiæ peripheriæ.



Centro A describatur semicirculus B D C, super diametro B C. Data autẽ sit inscripta C D, & ideò etiam ejus complementum B D: Quum enim in semicirculo angulus ad D sit rectus, & B C diameter, ac C D inscripta datæ, dabitur quoq; B D. Porrò demissâ perpendiculari E F, quia triangula F A E & I A C æquiangula sunt, quandoquidem angulum ad A habent communem; Anguli vero ad F & I sunt recti: Et propterea bases A C & A E æquales, quippe radii unius circuli; quare etiam reliqua latera homologa sunt utrinq; æqualia; Est igitur A F æqualis A I, & E F æqualis C I. Sed A I semissis est B D, quippe complementi inscriptæ C D. Est igitur etiam A F ejusdem B D semissis; At B D complemento inscriptæ sumatur æqualis in diametro B G, quâ sublatâ à tota diametro B C, remanet G C: Sed semissis B D, hoc est, A F, subducta à semisse diametri, hoc est, radio A C, relinquit F C dimidiũ G C. Ducta igitur E G æqualis est E C, & triangulum G E C æquicrurum. Ulteriùs quia E F media est proportionalis inter partes diametri B F & F C; porro quoniam C E æquè potest E F & F C simul junctis; Quocirca C E media proportionalis est inter B C & C F hoc est, inscripta dimidii arcus inter diametrum circuli, & dimidiam differentiam inter diametrũ & complementum initio inscriptæ C D. Quia verò rectangulum ex semisse diametri nempe A C, & tota differentia diametri B C, ac complementi B D quippe G C æquale est rectangulo ab integra diametro B C & dimidia differentia F C, efficitur inde, quod rursus C E inscripta quæsita media sit proportionalis inter ra-

Prop. 31. l. 3.
Prop. 47. l. 1.
Prop. 13. l. 6.
Prop. 47. l. 1.

dium AC, & GC nempe differentiam complementi inscriptæ BD seu BG, & diametri BC; quod erat propositum.

Atqui super hac unica propositione per continuam quasi ἀριχοτομίαν *Canon Sinuum* seu subtensarum ideò compendiosè absolvitur, quia radius locum in regula proportionum invenit, facto ab aliqua inscripta demonstrabili initio: ut
Prop. 47. l. 1. in hac figura subscripta quadranti CD est √2 datâ diametro BC 2 p:

Praxis autem progrediendi in circulo talis est:

1. *Oblatâ seu concessa CD ipsa inscriptâ, quæratur ejus complementum BD, subtrahendo potentiam subtensæ datæ à potentia diametri. Nam relicti radix est BD.*

2. *BD inventa subtrahatur à diametro BC, & relinquitur differentia GC.*

3. *Multiplicetur inventa differentia GC per radium, hoc est, addantur siphræ sufficientes decem, plures, aut pauciores, quibus cum unitate radius resolutus constat; & facti numeri radix quadrata est CE, quippe subtensa dimidii arcus quæsita.*

Hoc autem generale & sufficiens præceptum esse pro *Canone Sinuum*, ut hactenus, continuando, exempla diversa sequentia declarabunt. *Canonis* autem structores aut resolutos numeros ad operandum sibi proponebant, ut, post Ptolemeum, Johannes Regiomontanus & alii, datâ scilicet diametro 2 p: & confestim per plures siphras auctâ; aut contractos & merè irrationales, retentâ diametro duntaxat 2 p: & radio 1 p: ut Ludolphus de Cœlln, & recentiores Analytici, qui etsi inscriptas seorsim etiam compendiosius indagare sustineant, dum universalium irrationalium numerationem per omnes species exponunt: tamen insensibilis ferè differentia Epilogismo horum ac illorum intervenit, propterea quia præcepti unius conformitate praxis, ut dictum est, regitur. Quæ res etiam facit, ut neutra quoad certitudinem alteri præferatur.

Vide Ludolph: in fund: Arithmet: cap. 8. lib. 1.

Exempla in numeris resolutis.

Sit diameter 20000000, & ideò ejus quadratus 400000000000000: Jam ut exemplum figuræ præsenti accommodemus, quæratur CD subtensa quadrantis. Quoniam autem angulus ad D in semicirculo est rectus, & BD in
Prop. 31. l. 3. hoc exemplo æqualis CD, præterea quia potentia diametri BC æqualis est po-
Prop. 47. l. 1. tentiæ inscriptarum CD & BD; dimidiatâ igitur potentiâ diametri suprapositâ 400000000000000000, exsurgit potentia CD vel BD in hoc exemplo, $20000000\frac{17}{000}\frac{5}{00}$, cujus radix quad: est 14142135, redundantibus penes numerum quad: expositum, quos supra scriptos cernis: & ideò inventa radix minor justo est. Deinde quia BD hîc æqualis est CD, ea igitur à diametro abstracta relinquit differentiam GC 5857865. In radium autem novem siphrarum multiplicata, dat numerum $58578651\frac{36}{000}\frac{9}{00}\frac{17}{00}\frac{27}{00}\frac{1}{00}$ cujus radix est 76536689, incertum majorne an minor verâ evadat; siquidem differentia anteà major justo fuit, & hîc residui sunt numeri, quos vides, suprà scripti: Est autem dicta radix inscripta quæsita CE, quæ est latus octogoni inscripti.

Ulterius quum fiat per ἀριχοτομίαν progressus, subtrahatur juxta præmissum præceptum

præceptum numerus quad: 5857865000000000 ab expoſita potentia diametri 4000000000000000, & reſiduus eſt quadrat' 3414213500000000 cujus radix proxima eſt 18477590 complementū inſcriptæ octanguli, quod ut priùs à diametro 20000000 ſublatū relinquit differentiam 1522410; cui quando novem ſiphræ adduntur pro radio, ſtabit quadratus numerus $152241^{57}_{0}{}^{90}_{0}{}^{28}_{0}{}^{15}_{0}{}^{6}_{0}$, cujus radix eſt 39018072, rejectis ſcilicet & hêic numeris ſuprà ſcriptis, qui radicem non ingrediuntur, atq; hæc inſcripta 39018072 latus ſedecanguli eſt circuli ordinatè inſcripti. Sic porrò per *διχοτομίαν* in infinitum quaſi procedi poteſt.

Nunc idem exemplum pro acquiſitione lateris ſedecagoni circulo inſcripti praxi Ludolphi accommodabimus, ut Lector intelligat, præcepti ſuprà inculcati uniformitatem cum ſuperiore ſervari, nec ultrò numeros circa exitum calculi utriusq; multum abinvicem differre poſſe; proinde Analyticos compendiosè quidem diametrum in numero 2 exponere, ſed nullâ majori quàm ceteri certitudine, ut in exemplis attendemus.

Exempla eadem in numeris irrationalibus.

Diameter B C quia ſupponitur 2 part: & C D ac B D ejusdem cum diametro potentiæ ſunt, & quævis quadrant: ſubtendit, quare quævis illorum eſt √2, ſubducta igitur B D √2 de diametro 2 relinquitur 2-√2, qui numerus per radium multiplicatus idem manebit, unitas enim nihil mutat. Hujus itaq; latus √.2-√2 latus eſt octanguli inſcripti C E, quod reſolutum dat, ut prius, 76536689. Reſolutionis autem modus hic eſt, qui adhuc planè congruit cum priore. Nam primo reſolutus ultimus irrationalis √2 dat, ut prius, radicem 14142135 dùm quatuordecim ſiphræ, ut illic, addantur; & fiunt ſuperflui numeri, ut anteà, 1764175, quos radix non exhaurit. Eadem autem radix à √.2 ablata, poſtquam ſiphris aucta fuerit, relinquit, ut ſuperius, differentiam 5857865†. Et quum hic numerus augeatur per 9 ſiphras, ſtat, ut prius, quadratus 58576500000000000, cujus radix eſt 76536689. latus octogoni inſcripti, per omnia ut ſuperius. *Prop. 47. l. 1.*

Porro inventionem ſedecagoni, ſubducatur quadratum lateris octanguli 2-√2 de potentia ſeu quadrato diametri, 4, reliqui latus √2†√2 eſt complementum lateris octanguli ad ſemicirculum. Hoc de diametro ſubductum dabit 2-√2†√2 cujus latus √.2-√.2†√2 erit latus ſedecanguli.

Nunc ad reſolutionem hujus lateris irrationalis pro dato latere ſedecanguli accedamus, ab ultimo numero, ut prius factum. Is eſt √.2. omiſſo autem ſigno √ & 2 per 14 ſiphras multiplicato ſtat quadratus 200000000000000000 cujus radix, ut prius, proximè 14142135. Et quum propter ſignum † augeatur pr. 2. ab initio fit numerus planè qui ſuperiùs 341421350000000000 auctus per radiū ſeptem ſiphrarum, cujus radix eſt ideò ut illic 18477590 quàm proximè; quâ quidem ultimò à √.2 ob ſignum quod ſequitur, ablata, remanet numerus 1522410, cui, quando novem ſiphræ ut ſuperiùs adjiciuntur, ſtat ultimus quadratus, ut & illic, penes numerum 152241000000000000, & radix inde ut anteà 39018072, pro latere ſedecagoni.

Atqui ex hac collatione ſpero intelligentem & attentum Lectorem ſatis percipere, qua congruentia in numeris præcepti conformitas priſcis canonis ſtructoribus *Ludolphum* & Analyticos adſtringat, etiam modò ulterius *διχοτομία* producatur. Certum enim & analyſin poſterioris factionis prioris æmulam eſſe, adeò ut nulla aut perquàm exigua differentia inter utramq; relinquatur. Cete-

rum hinc nullo modo concludere dabitur, rationem peripheriæ ad diametrum intra numerum aut Palatini operis à Cl. *Valentino Othone* operosè per numeros magis, quàm à *Ioach: Rhetico* extensi, aut *Ludolphi* & Analyticorum adeò præcisè includi. Nam præterquam quod Cyclometria præmissa (quæ paullò majorem efflagitat, licet infra media inventa Archimedis consistentem) contradictionem non patiatur, quum mensurationem circuli in symmetris tribus diversis modis conquisitam oculis exponat, Naturæ maximè convenientem, sed & à Geometria nuspiam abludentem; Duæ causæ sese offerunt, simulq; circa ultima segmenta continuatæ δίχοτομίας quasi concurrunt, quæ differentiam, inter veram Cyclometriam, & sic per sectionis continuationem in irrationalibus acquisitam satis arguunt: Quarum prior in ἀναλύσει numerorum irrationalium sita est, quæ quò longius per δίχοτομίαν educitur, eò incertior evadit. Si enim nullibi radix perfectè ex iis numeris haberi poterit; consequens est, ut quò diductior bissectio fuerit, eò fiat numeri exitus incertior. Neq; multum juvat radium myriade siphratum supponere, siquidem errorculus in ultimo radicis numero multiplicatior inde exsurgit. Quoniam verò istud ad causam priorem ostendendam pertinet, in medium Epilogismum Ludolphi producemus, qui è numero irrationali lateris polygoni 107374824 circulo inscripti nascitur, & talis est:

Prima causa cur δίχοτομία in numeris irrationalibus præcisionem debitam non admittat. Ludolph: in l. de circulo.

√.2-√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2√.2+
√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2√.2+
√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√.2+√2

Unde facta resolutione oboritur dicti polygoni latus ipsi 585167231706863871 88: Qualium diameter est 200000000000000000000000000000000. & tandem hinc proportio perimetri ad diametrum

Perim: 31415926535897932384626433832785.

Diam: 100000000000000000000000000000000.

Ceterum si vel in ultimo numero lateris polygoni propositi unius unitatis defectio fuerit, certè augebitur per integrum numerum lateris inscripti polygoni 1073741824. At nullum esse defectum, quem talis praxis causari poterit, ubi figuris 30 vicibus dum per radios extrahuntur defectus defectui accumulatur, & ejus multiplicatio toties in radium plurimarum siphrarum fit, ut suprà in resolutionis calculo cognoscitur, nemo penitius rem introspiciens facilè credet. Nec lubricitas ista radicum hoc modo extrahendarū veritati Cyclometriæ à nobis inventæ apud sapientes præponderabit; Ceteros autem libenter suo sensu abundare relinquimus, adhuc tamen de altera defectionis causa in numeris, quibus extremi quasi polygoni latus circulo inscripti enuncietur, amicè potiùs admonendos, quàm perperam unquam à me traducendos; quum hoc veritatis prævaricatoris fuerit, cui equidem veritati præter hominum opinionem, quantum in me fuit hactenus, quod Deus novit, semper adhærebam. Hæc autem causa tota dependet à disproportionata mutatione subtensæ, vel hujus semissis, nempe *sinus recti* sub initium *Canonis*, ubi extrema quasi arcuum segmenta subtenduntur, & *sinus versi* eorundem arcuum, seu diametri circuli pene in iis locis immutabiles. Etenim in figura præmissa ubi CE subtensa arcus exigui nempe unius aut perpaucorum minutorum fuerit, δίχοτομία huc extensa fit BC complementum inscriptum ferè æqualis diametro circuli BC, adeo ut δίχοτομίας

τομίας vice prorogatâ insensibiliter ferè G C promoveatur. Ex qua tamen differentia inter diametrum B C & complementum dictum B D tota ratiocinatio de subtensa quæsita dependet. Ut autem, quod dico, in veritate constet, conferatur saltim *sinus rectus* & *versus* inter se ad 1. Minutum: rectus est ex Opere Palatino 1. M. respondens, 2908882, qualium radius est 10000000000. Contra vero sinus complementi hujus, seu *sinus rectus* resp: 1. M. à fine quadrantis 9999999577, adeò ut quando hic à radio subtrahitur, fiat sinus versus ad 1. M. 423. Ergò mutatio unitatis in sinu verso seu diametro circuli, producit circa unum minutum in sinu recto 6877, & proinde adhuc sub initium circuli aut hujus quadrantis, ad quod polygonus 1073741824 se extendit, duplo quasi plus; ut penè nulla collatio proportionis ad extremas subtensas inveniendas sese offerant. Nec igitur alia multò hêic certitudo esse poterit, quàm in tempore ex altitudine solis circa meridiem rimando, exquisito licet organo ad observandum adhibito; eam videlicet ob causam, quoniam per semihoram ante & post meridianam lineam mutatio altitudinis solis insensibilis penè fuerit. Aut si quis solem juxta tropicum punctum ita ex altitudine sua meridiana observandum arbitraretur, ut vel eundem penes ipsum tropicum punctum ad certum tempus versaturum inde concluderet, vel quicquam certi hinc de annuo ipsius motu statueret: Quandoquidem diurna declinuationis mutatio juxta solstitium invariabilis penè sit. Quod utrumq3 simile fortasse eum latet, qui Theoriam à praxi etiam urgente necessitate discernere nescit. Ceterum hoc, de finibus, Cl: Valentinus animadvertens, non solum id confessus est *quod quando in progressione sectionis per æquales arcus basium incrementa sint quodammodo imperceptibilia, certi hinc nihil invenietur*; Sed etiã quærẽdo sinus ad singula minuta à dodrante gradus, hoc est, 45 scrupulis primis, & ad id Διχοτομίᾳ utendo, proportionem Geometricam in Arithmeticam Logisticam transtulit, nullâ aliâ causâ motus, quàm quæ dicta est, quæq; ab impossibilitate ducitur *sinus* satis certò quærendi, ubi medium, per quod praxis instituetur, tàm exiguam alterationem subeat. His igitur causis bene ab intelligentibus ponderatis, non dubito, quin differentiam, qua vera Cyclometria hanc superat; quæ in subtensis ultimorum segmentorum frustra quærere quidam, qui nodum Gordium secare potius quam solvere satagunt; tandem pro vera admittant, & simul *Canonem*, sub initium præfertim, emendatione aliquâ opus habere, nobiscum agnoscant, quum id desiderio Mathematicorum hactenus fuerit expetitum, nec nisi à vera Cyclometria unquam exspectandum, quam quia nunc Dei beneficio in manibus habemus, alteram curam nostram per sectionem seqq: eò, juxta propositum, convertemus. *In Opere Pag. 44 &c.*

SECTIO SECUNDA.

In qua primò ratio traditur Canonis sinuum instaurandi, ubi radius ad decem siphras se extendit. Deinde ipsa emendatio Canoni sub initium adjicienda in quantum fieri convenit, subjicitur.

Si ultra usitatum hactenus à Regiomontano, Lansbergio, Magino, & aliis, radius circuli non extendatur; sed intra numerum 10000000, manserit, nulla Canoni è vera Cyclometria emendatio accedit, ut nunc statim in exemplo, quod primo Minuto ab initio applicari poterit, palam faciam: Huic autem in tali radii extensione sinus rectus respondet 2909. similiter quoq; ex inventa proportione perimetri ad diametrum, quæ Cyclometriæ superiori aliquoties inculcata

est, nempe $\frac{3}{1}\frac{14}{00}\frac{18}{00}\frac{59}{00}\frac{60}{00}\frac{44}{30}$ evadit. Nam multiplicatis gradib. semicirculi 180 in 60 sexagesimas, & facta numeri 314185960 44 divisione in summam, quæ minuta prima sunt, 10800, fit de peripheria pro uno minuto primo 2909129, cui quando paullò illic minor sinus rectus competat, ejus circuli, cujus radius est 10000000, evadit ipse sinus rectus 2909, per omnia ut in *Canone* Lansbergii, Magini & aliorum reperitur. Nec in fine quadrantis, ubi etiam sinus versus uni minuto conveniens oritur, ulla sensibilis mutatio ab horum Canone deprehenditur: Ut aut Geometria hactenus per hunc Canonem exercita, aut Astronomia in motibus cœlestibus aliquid sensibilis detrimenti ob canonis trigonometrici defectum passa sit. Interim autem dum radium ad decem siphras cum Palatino ob paullo majorem in calculo subtiliore sicubi incidente certitudinem extendamus, ex collatione sinus recti ad 1 M. superius inventi 2909129, & quem Palatinum Opus è continua δίχοτομία supponit nempe 2908882, deprehenditur differentia 247, quæ qua proportione sinibus operis Palatini applicanda, & quousq; extendenda venit, censuram meam praxi conjunctam subjiciam, cum veritate quàm proximè, ut spero, congruentem. Ad hanc autem hasce maximas usurpo, quarum postea in plena Canonis restitutione usus esse potest.

Ex Ptolemeo. 1. *Inæqualium duarum circulo subtensarum minor ad invicem ratio est, quàm arcuum, quas subtendunt.*

Contrà. 2. *Inæqualium duarum circulum Tangentium major ad invicem ratio est, quàm arcuum, quorum tangentes sunt.*

3. *Dimidium summæ laterum polygoni circulo inscripti & circumscripti majus ipsâ circuli peripheriâ est.*

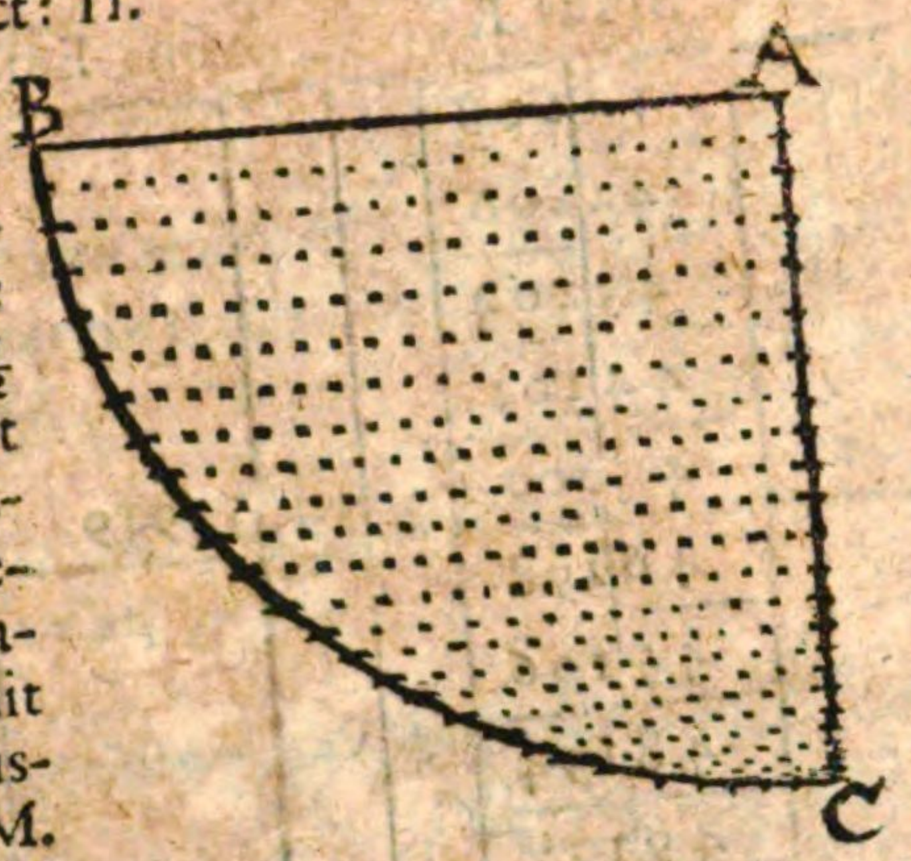
Porro hisce tribus *maximis*, quæ commodè ex ipso *Canone* monstrari poterint, illud commune est, quod quo propius initio Canonis hæc appropinquant, eò minores differentias rationum admittunt, donec in initio circuli aut ipsius quadrantis ipsarum fiat identitas.

Primùm igitur quoad extensionem differentiæ præmissæ, quâ defectui *sinus recti* ab initio quadrantis subvenitur, quum tertia *Maxima* utamur, *sinibus* & *tangentibus* ex *Canone* Operis Palatini desumtis, quia invenimus ad divisionem circuli Archimedeam 96 laterum, $3\frac{7}{4}$ gr: prout circulus modò in 360 grad: dividitur, cujus semissis est 1 grad: $52\frac{1}{2}$ M. *Tangentem* huic arcui respondere 327366104, *sinū* verò rectum esse 327190828; quorum summa est 654556932, & dimidium 327278466. Sed peripheria ad 1 gr: $52\frac{1}{2}$ è vera Cyclometria deducta est 327277042. Differentia igitur est à superiore 1424, qua scilicet peripheria circuli vera à dimidio summæ *tangentis* & *sinus* recti ad 1 gr: $52\frac{1}{2}$ M. superatur; quæ collationi antecedentium, ac consequentium *Canonis* satis congruit, ut proximè apud Archimedeam circuli sectionem talis emendatio quiescat, siquidem δίχοτομίαν saltim sex vicibus in praxin ita admittat, ut à neutra causarum præmissa magnoperè incommodetur.

Nunc de applicatione maximæ differentiæ inter verum *sinum* & *Canoni Palatino* insertum agemus.

Quandoquidem à principio quadrantis, ad præfixum emendationis terminum 1 gr: $52\frac{1}{2}$ M. differentia ista, per quam emendatio contingit, successivè diminutionem patiatur, etiam inæqualiter crescentem, ut penè ipsa differentia *sinuum* in sua serie: Proinde totum quadrantem A B C ad dictæ differentiæ, quæ

suprà



ſupra inventa eſt 247, (qualium radius AB fuerit 10000000000) juſtam diſcretionem accommodandum putabam, ita quidem, ut maxima differentia quippe 247 lineæ extremæ AB appendatur, & ſic ordine; nam ſi 1 gr: $52\frac{1}{2}$ M. per 90 gr: Quadrantis diviſa fuerint, cedit cuiq; gradui $1\frac{1}{4}$ M. quare 5 M. ſingulis 4 gradibus congruunt. Multiplicatâ igitur differentia maximâ in *ſinus* rectos ſingulorum quaternorum graduum quadrantis, provenit quidquid ſingulis quinis minutis debetur, usque ad finem emendationis penes 1 gr: $52\frac{1}{2}$ M. inſtitutæ. Unde reliqua intermedia minuta ſuas quoq; proportionaliter poſtea ſortiuntur differentias; ut in adjecta Tabula vides. Sufficiunt autem hêic ſinus in circulo, cujus radius eſt 100000

G	Sinus R.	Min:	Emend:
0	100000	1	247
		2	247
		3	247
		4	247
86	99756	5	246
		6	246
		7	246
		8	245
		9	245
82	99027	10	245
		11	244
		12	244
		13	243
		14	243
78	97815	15	242
		16	241
		17	240
		18	239
		19	238
74	96126	20	238
70	93969	21	237
		22	236
		23	235
		24	234
		25	232
		26	231
		27	230
		28	229
		29	227
66	91355	30	226
		31	224
		32	223
		33	221
		34	220
62	88295	35	218
		36	217
		37	215
		38	213
		39	211
58	84805	40	210

G.	Sinus R.	Min: Emend:	G	Sinus R.	Min: Emend:
	41 208		1 6 149		1 31 73
	42 206		1 7 147		1 32 70
	43 204		1 8 144		1 33 66
	44 202		1 9 141		1 34 63
54	80902	34 55919	1 10 138	14 24192	1 35 60
	46 198		1 11 135		1 36 56
	47 196		1 12 132		1 37 53
	48 194		1 13 129		1 38 50
	49 192		1 14 126		1 39 46
50	76604	30 50000	1 15 124	10 17365	1 40 43
	51 187		1 16 121		1 41 40
	52 184		1 17 118		1 42 36
	53 182		1 18 115		1 43 33
	54 179		1 19 112		1 44 29
46	71934	26 43837	1 20 108	6 10453	1 45 26
	56 175		1 21 105		1 46 22
	57 172		1 22 102		1 47 19
	G 58 170		1 23 99		1 48 16
	0 59 167		1 24 96		1 49 12
42	66913	22 37461	1 25 93	2 3490	1 50 9
	1 1 162		1 26 89	1 1745	1 52 5
	1 2 160		1 27 86		1 52½ 0
	1 3 157		1 28 83		
	1 4 155		1 29 80		
38	61566	18 30902	1 30 76		
	1 5 152				

ELENCHUS CAPITUM OPERIS CYCLOMETRICI.

CAP. I.

Circulus quid? Quadratio Circuli quid? communes Circuli affectiones cum figuris rectilineis, imprimis triangulo, velut figurarum primo: deniq; cur Tetragonismus Circuli à Mathematicis tantoperè exoptatur?

CAP. II.

Recensio trium diversarum opinionum, quas diversi Mathematici de Quadratura Circuli hactenus foverunt, cum ipsarum dijudicatione.

CAP. III.

Elenchus præcipuorum quorundam Cyclometricorum, quorum conatus pro Circuli mensuratione in vulgo exstant.

CAP. IV.

Primum ac præcipuum momentum, ad perfectam Cyclometriam unquam ostendendam, consistit in reciproca inventione, sectionis Circuli ordinatæ toti symmetræ; & lineæ cujusdam rectæ peripheriæ Circuli symmetræ, unde posteà lunulæ, sexangula nempe & triangula, item reliqua ad Quadrationis *pragmateiam facientia Circulo quoq; commensurabilia ostenduntur.*

CAP. V.

Linea quædam recta Circulo subtensa, nempe latus trianguli æquilateri eidem Circulo inscripti, peripheriæ ejusdem Circuli longitudine commensurabilis imprimis ostenditur. Item diametro Perimeter ejusdem Circuli incommensurabilis.

CAP. VI.

Ubi requisita Symmetria omnium figurarum cum Circulo, quæ ad hujus Quadrationem *spectant, ostenditur, idq; ex inventa ac præmissa symmetria lateris trianguli æquilateri inscripti cum Circuli ejusdem perimetro.*

CAP. VII.

Indicatio mediorum, quæ præterea ad inventionem veri Tetragonismi *Circuli faciunt. Quæ quidem in ipsa Natura* Plani *fundata sunt, ad ipsius varia spacia inter se liganda: & ideò* æquationibus *eorum ante omnia inserviunt.*

CAP. VIII.

Quadratio *semicirculi συντόμως, æquatione inter semicirculos, & Hexagoni inscripti semissem, ritè in continua trium proportione ex antecedentibus instituta: in qua quoq; inter alia Lunulæ Hexagoni, toties optatæ, Quadratio cernitur.*

CAP. IX.

Ubi secunda Tetragonismi *operatio perficitur κατ' ἀνατομίαν sextæ partis Circuli* æquatione *similiter juxta continuam proportionem institutâ.*

CAP. X.

Tertia æquationis *ratio quâ mediante Lunulâ trigonicâ in comparatione cum triangulo æquilatero inscripto &c. Circulus tertiò* Quadratur, *& simul peripheriæ ejusdem, respectu lateris trianguli æquilateri inscripti, in vera sua mensura exactè determinatur; cum appendice de inscriptione [illegible]*

CAP. XI.

Ubi usus Cyclometriæ in aliquot Problematis traditur, nempe de rationibus, quibus Circulus *quivis oblatus* in rectilineum *imò* Quadratum, *& versâ vice: item curva linea in rectam transferri per antecedentia potest, idq; tam beneficio Circini ac Regulæ, quam numeris. Præterea quibus modis datus Circulus augeri minuiq; poterit.*

SPHALMATA *à typographo in Cyclometriam hanc commissa, & priùs à benevolo Lectore juxta appositam emendationem corrigenda, quâm opus hoc recenseat' atq; dijudicet.*

pag.	lin.	Sphalmata.	Emendata.
10	43.	ut parvum circulum alium	ut aliam rationem ad parvum Circulũ aliam ad magnũ &c.
11	3	Calculo	Calculum.
13	32	quo	qua
14			ad ponatur I ad alterum extremum Diametri circuli.
16		ad marginẽ lib. 2.	lib. 12.
17	13	$\surd 1\frac{1}{2}$	$\surd 1\frac{1}{2}$.
	29	ἐφαρμώσει	ἐφαρμόσει
18	17	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{3}$.
19	18	$40\frac{1}{3}$.	$\surd 40\frac{1}{3}$.
20	30	$4.\surd\frac{2}{12}$.	$\frac{1}{4}$. $\surd\frac{1}{12}$.
23	27	TE	Ts
25	29	θε	θE
29	5	BCωκ	BCωη
30	1	foren, tut	forent, ut.
			In figura desideratur S medio loco inter C & M.
31	40	repieres	reperies.
32	10	proximè præmissam	penultimam proximè præmiss.
34	23	iteratò	iterato expungatur.
37	36	Cõmensura	Commensurabiles.
		$\surd\frac{5}{4}$. (bilis	$\surd\frac{9}{4}$.
38	1 ult.	ceteris tribus æqualis	Singulis ceteris tribus æqualis.
39	20	BAD	BAC.
	6	ACB	ACE.
42	19	Ab	AH.
43	35	à quadrato	supple: ID, remanet
50			Quadratum.

pag.	lin.	Sphalmata.	Emendata.
61	17	DAC	DAE
62	3	Sectionis	Sectoris.
69	15	DF	DE.
72	4	2. $\frac{2}{3}$ cunulis	super centro A æquare $2\frac{2}{3}$ semicirculis trigonicis & ideò remotis &c.
			In figura desiderantur in fine Diam. circuli F, linea Diagonalis BMO & R medio inter F & C.
75	30	BLKM	BLKI.
76	19	HILD.	HKLD.
	33	$3\frac{15}{43}$c.	$3\frac{61}{43}$c.
79	2	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{48}$.
81	4	AX	AN
82	6	NR	NK.
83	5	unum	unam.
84	7	Manitudin.	Magnitudines.
89	22	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$.
93	27	EG.	CG.
95			In figura pro I ponatur L.
97	24	qua	quæ
101	45		supple: ad
102	30	per radios	radices.
103	11	offerant	offerat.
		Cetera levi vel literula posita ipsũ orationis cõtextum minimè vitiat, sensumvè turbat, benevolus & intelligens lector facilè proprio Marte emendabit.	ora errata in quibus omissa, vel perperã

quærunt, ad paupertatem redactos videmus, quandoquidem veritas in sincera natura Mercurij sepulta jaceat: eodem modo Cyclometrarios extra circulum, dimensionem ejus in asymmetris impuris, non καθ' ὅτι, ut ἀντεχνῶς καὶ συμμετρῶς in natura est; Sed ἀτεχνῶς ἢ κατὰ τὶ duntaxat quærentes, ad eam miseriam restringi percipimus, ut mentis cruciatum ad minimum sustineant, & temporis jacturam frustra patiantur, quum nihil πλεῶτατον καὶ ἐπισκμονικώτατον è suis Epilogismis educere sustineant. Quod certè istis & illis ideo contingere dubium non est, quia circa objecta illa, arte in sua principia resolvenda, non satis ante inceptam operationem consultarunt, & heic differentiam quandoq; inter Theoriam & praxin in Numeris incidentem quidam hactenus ignorarunt. Quoniam verò dissimilitudo maxima heic appareat, quod Mercurius materialis existens semper nova refectione secundum artem opus habeat; Circuli autem abstractiva dimensio semel inventa perennet, & orbi quidem in perpetuũ sufficiat; Quocirca Alchymistis Mercurium suum relinquentes, dum ad circulum nos confe-ramus, quæso num quispiam antea repertus est, qui in hujus indolẽ inquirens, QVADRATURAM ejus tandem post dubia quædam aggrediebatur, justâ decisione prius tollenda, quàm ad optatum finem perveniendum. Quorum illud præcipuum fuit; nùm contra vulgi superstitiosam opinionem *linea alia recta curvæ æquari* possit? Negativam qui hactenus tenuerunt, nec Eutocij Pronunciato locum reliquerunt, ad unicam diametrum velut lineam rectam, cum curva peripheria scilicet comparandam omnes respexerunt: nec adverterunt arguendi vim à particulari ductam, generalium potestate absumi. Certè quum veritatem dicendum sit (ut Tullius loquitur) fateri cogimur, nullum hactenus majorem errorem in hoc omnium nobilissimum argumentum admissum fuisse. Quo intellecto, equidem operæ precium duxi, figuram Circulo inscriptam reperiri, cujus latus & Circuli ejusdem peripheriæ symmetrum, & simul eadem figura Circulo ipsi symmetra esse poterit. Etenim ea tandem penes triangulum æquilaterum inscriptum circulo duntaxat inventa, utramq; paginam facit, quando & operationes pro QVADRATURA Circuli ab omni ἀσυμμετρίας impuritate liberat; & eandem prorsus in Natura absolutam ac perfectam esse suggerit. Quibus feliciter â nobis demonstratis, haud diu cunctandum fuit, quantitatum vestigia in Natura pro circuli Quadratione insectari, & ea ut plurimum in continua trium terminorum seu quantitatum proportione venari: Ubi adeò promptè mihi quærenti hæc se ingesserunt, ut non uno duntaxat, verum tribus diversis modis Circuli QVADRATIO hactenus se circa unum idemq; quantitatis punctum sisteret; qui quidem in quantitate ac numero consensus nunquam se obtulisset, nisi veritas à nostra parte stetisset, & omninò in inventa à nobis Cyclometria planè quievisset. Nec dubito, φιλομαθὴς καὶ φιλαλήθης quisquis es, qui, rationibus demonstrationes nostras ingredientibus diligenter à te perspectis, & inter se collatis, rem ipsam putaveris, quin idem nobiscum fatebere, modò hæc aliâs intellexeris; nec te aliorum auctoritate aut persuasione à veri tramite, quo nos per Naturam Circuli hactenus ducebamur, abduci siveris. Sin verò alius quisquam fuerit, quippe è numero eorum, qui vel conceptæ opinioni de Ludolphea Quadratura pertinaciter adhæret. (Quam tamen ipse imprimis deceptus è Canonis structura qualicunque deducit) Vel hæc nostra à Natura simul ac Geometria ad veram Quadraturam ostendendam promanantia minus intelligit: Vel deniq; successui laboris nostri οὐ χθὲς ἢ πρωΐ. occepti: Sed justo jam tempore cocti, perversè invideat: Hunc per sacra Mathemata oramus, ut Demonstrationes nostras, ac toties iteratas rationes Quadraturam hanc ingredientes diligenter introspiciat,

ſpiciat, inter ſeſe comparet, ac juſtè diſcernat: Priuſquam immaturo ac iniquo judicio nos premat, & cavillis oneret. Scio quàm cautè ac ſuſpenſo pede in erudito Mathematum pulvere ambulandum, ne in Geometriæ à priſcis inventæ ac Euclidis opera feliciter collectæ, ſancitæ, & ad poſteritatem propagatæ, ſtatumina uſpiam impingatur: Sed & juxtà, gratiâ Dei, ſcio, & vel in præſenti Tractatu fidem facio, multa Theoremata, ac Problemata ad juſtum Geometriæ complementum deſiderari, etiam præter ea, quæ Pappus & alij excellentes Mathematici adjecerunt, intra στοιχεώσεις Euclideas fruſtrà quæſita. Latus trianguli æquilateri Circulo inſcripti Peripheriæ Circuli ejuſdem ſymmetrum eſſe, & ſimul triangulum ipſi Circulo ſymmetrum qui negat, Demonſtrationi manifeſtæ ſe opponit, niſi contrariam ipſe attulerit, majori vi inferendam, quandoquidem omnem propoſitionem aut veram aut falſam eſſe oporteat. Nec enim inani cavillatione, ſed aperta demonſtratione agendum, quam qui heic adverſus nos contexere præſumit, id ſine dubio agit, ut ſimul Archimedem adeoq; ipſam rectangulorum aream Circuli, pari ubiq; menſura continentium, naturam, expugnare velit, quod quàm difficile imò impoſsibile fuerit, ipſe, dum agendo ſpectari geſtiat, viderit. Ceterum qui heic ſuo adverſus nos conatu ſe fruſtrari ſenſerit, nihil reſtat, quam ut idem ingenuè fateatur, veram ſcilicet Cyclometriam non amplius hiulcam, ſed abſolutam in ſymmetris eſſe oportere, imprimis trianguli æquilateri cum Circulo, cui inſcribitur, reſpectu. Aut igitur mẽſurã Circuli è ternis noſtris æquationibus promanantem agnoſcet (quæ quidem æquationes, quum maxima ex parte in continua proportione fundatæ ſint, eas Naturæ ac Geometriæ pariter conformes eſſe decet.) Aut ad veriorem Circuli menſuram oſtendendam, totidem ſibi fabricabitur, æquè inter ſeſe conſentientes: nec minoribus rationibus, aut minori convenientiâ cum medio ex Archimedæis inventis ſuffultas; Tunc, qui nũc poſt tabulã lateo, maſculè proſiliam, &, ſi Fata ſiverint, in arenam cum eodem deſcendam. Sin minus, non dubito, quin alius cordatus vicem meam ſit ſubiturus, quũ veritas premi quidẽ, ſed opprimi planè neſciat. Illud autem heic præmoneo, ut is qui Graphemata aut Propoſitiones noſtras, ubi res tangi videtur, falſitatis arguere velit, ex contrarietate fortaſſe, quam curua cum rectis habitura exiſtimet, ea prius lege oppoſitorum contraria eſſe ritè demonſtret, ac convincat. Mirè enim nobis ad propoſitum hactenus conduxerat, totam Matheſin in comparatione ſitam eſſe, ſcilicet eorum quæ genere non ſunt diverſa, qualia curua ac recta. Hæc æmulis & invidis: Veritatem autem, quam poſt tot ſecula in manibus nunc verſamus, ſincerè amantibus pertinacem laborem noſtrum pro vera Cyclometria aſſerenda gratiſsimum fore ſperabimus, adeò ut invento farre, nemo horum glande deinceps veſci velit,

Vale.

ELEN-

Usus Tabulæ.

Usus autem hujus tabulæ est, ut adscripta emendatio sinibus rectis ad singula adnotata minuta &c. in Canone Palatino aut alio, ubi radius ad decem siphras suppositа est, adjiciatur, quò sinus emendatus haberi queat.

Exemplum.

Sit sinus rectus ad 6 Minuta Canonis Palatini emendandus: sinus rectus ● gr: 6 M. respondens inibi invenitur 17453284. Emendatio autem 6 Minutis respondens est 246 addenda, & provenit sinus emendatus 17453530.

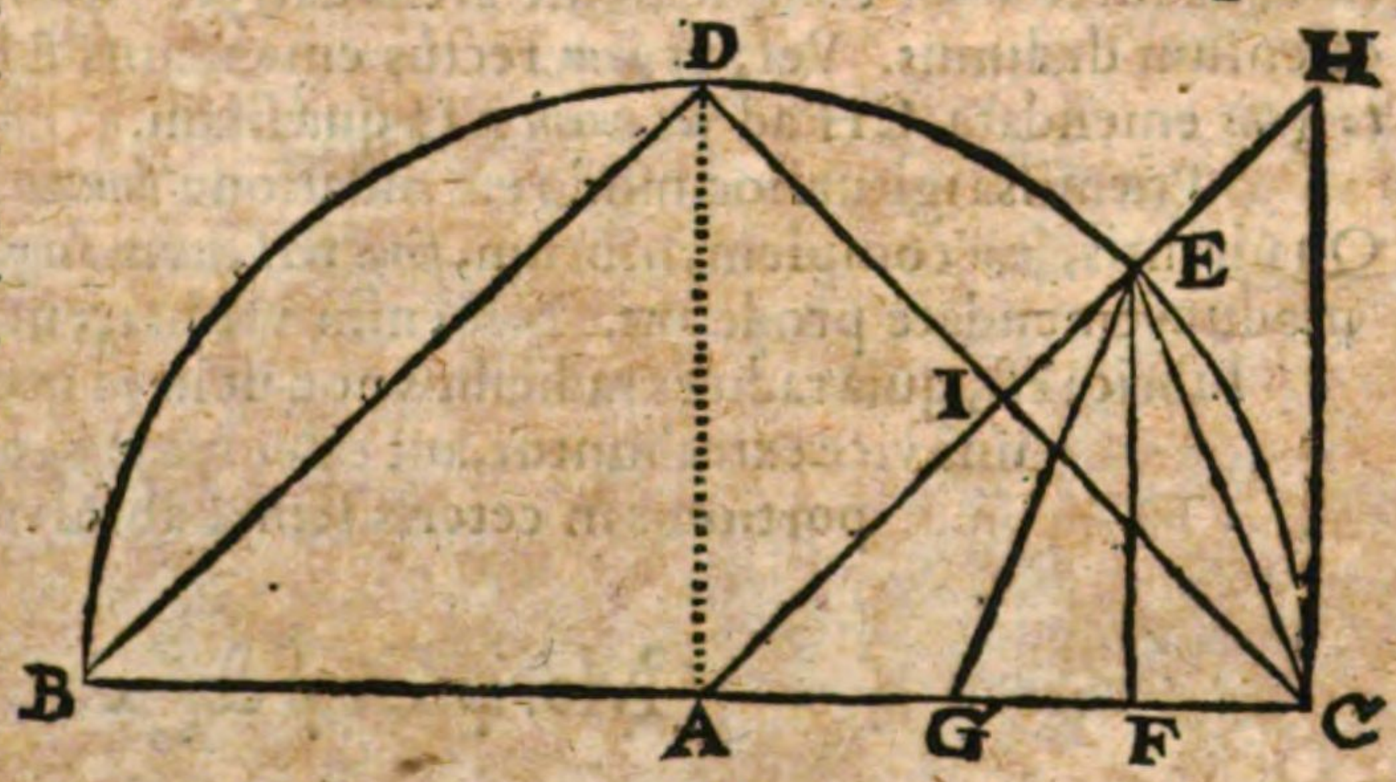
Et sic in reliquis.

SECTIO TERTIA

UBI

Sinibus rectis modò instauratis, reliqua nempe sinus complementi, unde Sinus versi ducantur; Item, Tangentes ac Secantes ita demonstrantur, ut simul quoq; emendationem juxta veram Cyclometriam subeant.

Repetatur figura suprà posita, cui uni computatio totius *Canonis Trigonometriæ* per διχοτομίας incumbit, ut supra ex parte ostensum est, & cogitetur heîc arcus CE intra terminũ emendationi præfixum, hoc est, 1 gr. M. 52½ peripheriæ, versari, & semper diminui, donec E cum C coeat. Concipiatur talis arcus *sinus rectus* esse EF, qui juxta veram Cyclometriam semper post præmissam emendationem auctior reperitur, scilicet quando AC radius fuerit 10, 000, 000, 000.



Quum igitur quæratur AF *sinus rectus* complementi arcus CE, aut ipsius *residuum*, ad radium, nempe FC, quod est *sinus versus* dicti arcus CE: tunc quia in Orthogonio AFE sinus EF emendatus in promptu fuerit, cum radio AE, datur hinc AF. Etenim sublato Quadrato EF de Quadrato radii AF remanet Quadratus numerus AF, cujus radix est ipsa AF Quæsita. Equidem experimentum hîc feci primùm supponendo EF sinum emendatum ad arcum unius grad. Deinde ad semissem gtadus: nec utrobiq; ex Epilogismo inveni AF, quæ canoni Palatino inscribitur, minorẽ 3 particulis, in *sinuum* numero: posito scilicet radio AC 10, 000, 000, 000, Adeò exiguũ est, quod *sinibus recti* prope finẽ Quadrãtis, aut etiã *sinibus versis* juxta ejusdẽ initiũ ex hac emendatione debetur. *Prop. 47. lib. 1.*

Porro quum quæratur *Tangens* arcus CE, quæ est CH, Est, ut AF, cujus inquirendæ ratio modò dabatur, ad FE *sinum rectum emendatum*, sic radius AC ad quæsitam CH. Nimirùm & heîc facto ad semissem gradus experimento, vix aliquid sensibile tangenti CH accedit, ultra emendationem in *sinu* FE factam; Quandoquidem inter AF & AC terminos proportionis primos, & numeros longiùs productos differentia heîc exigua fuerit.

Sed facere non possum, quin hoc loco, ut maxime oportuno, admoneam securitatem vel potius credulitatem eorum nimiam esse, qui existimant, Ludolphum aut quemquam pragmateiâ Sectionis utentem, peripheriæ Circuli mensuram penes eos numeros, qui in Epilogismo ejus juxta vestigia Polygoni lateris præmissi 1073741824 intra extraq; circulum apparent, confeciſſe. Etenim id sensato & intelligenti Lectori Mathematico judicandum relinquo; Quod, quum justè nunc augeatur semissis subtensæ duplicis arcus CE, nempe EF, juxta ea quæ præmissa sunt, augebitur quoq; inde *Tangens* CH, & propterea circuli peripheria æquè & quidem rectius heîc versabitur, inter latera talis inscripti ac circumscripti polygoni. Nec certè ullus Sectionis Epilogismus est, qui non exhibebit circuitum polygoni inscripti minorem eo, qui circulo circumscribitur, laterum numero æqualis, ut argumentum eorum, qui tale quid ad veram Cyclometriam probandam conducere opinantur, non nisi risu excipiendum arbitrer.

Postremò autem de facili etiam habebitur *Secans* cujusq; arcus, factâ prius *Sinuum* intra præscriptum suum terminum restitutione; Enimverò in Orthogonio HAC pro *secante* AH, quia ei æquiangulum est EPA; Erit ut AF ad radium AE; Sic rursus radius AC ad *secantem* AH. Est proinde radius medius proportionalis inter *sinum* complementi arcus dati, & *Secantem* arcus ipsius, ut alibi ostensum dedimus. Vel; ut *sinus* rectus emendatus EF. est ad radium AE: Sic *tangens* emendata CH ad *secantem* AH quæsitam.

Præmissâ igitur hoc modo emendatione *sinuum* rectorum penes initium Quadrantis, *sinus* complementorum, *sinus versi*, item *tangentes* & *Secantes* ad eundem modum emendatè prodeunt. Nec enim via heîc, ut in δίχοτομίᾳ continua, lubrica est, quia radices radicibus non ut in ea complicantur; Sed aut unâ vice extrahuntur, aut calculus per regulam proportionis in ceteris semel absolvitur.

Μόνῳ Θεῷ δόξα.

Bayerische Staatsbibliothek München

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Longomontanus, Christen Sørensen,

Cyclometria vere & absolute In ipsa Natura Circuli cum rectilineo inventa, & ita quidem, ut Circino & Regula exquisite tractari poßit Ab omnibus ingenuis Matheseōs alumnis hactenus exoptata

Hamburgi 1627

4 Math.p. 93
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053395-4
VD17 12:194059G